१

संख्याशास्त्रीय माहितीचे स्वरूप आणि मध्यवर्ती प्रवृत्ती

घटक :

१.१ प्रस्तावना

१.२ वारंवारीता वितरण

१.३ वारंवारिता वितरणाचे आलेखात्मक चित्रण

१.४ केंद्रीय प्रवृत्ती मापनाच्या पद्धती

१.५ सरासरी

१.२ मध्यगा / मध्यमा

१.७ बहुलक

१.० उद्दिष्टे

- सांख्यिकीय तंत्रांची गरज व महत्त्व लक्षात घेणे.
- वारंवारीता वितरण तंत्र समजून घेणे.
- केंद्रीय प्रवृत्तीची विविध परिमाणे अभ्यासणे.

१.१ प्रस्तावना

पृथ्वीचे निरनिराळ्या पद्धतीने केल्या जाणाऱ्या वर्णनाचे एक मूर्त स्वरुप म्हणजे भूगोल होय. त्यामुळे भूगोल म्हणजेच पृथ्वीचे वर्णन अशी फार जुन्या काळापासून प्रचलित असणारी व्याख्या आपणास ज्ञात आहे. पृथ्वीच्या वेगवेगळ्या भागात भ्रमंती करणारे त्या भागातील वर्णन लिहीत असत. यासर्व ठिकाणच्या वर्णनांच्या आधारे भूगोलाचा अभ्यास साध्य केला जात असे. त्याकाळी भूगोलाला कोणत्याच प्रकारचे शास्त्रीय कवच नव्हते. केल्या जाणाऱ्या वर्णनामध्ये सांख्यिकीय माहितीचा अभाव आढळत असे. त्यामुळे पृथ्वीवर्णनामध्ये बऱ्याचदा पुनरावृत्ती होत असे. तसेच अशा माहितीत कित्येकदा सत्याचाही अभाव आढळ असे. या सर्व गोष्टींची दखल घेत भूगोलाच्या अभ्यासाचे एक निश्चित, सुव्यवस्थित व परिणामकारक असे स्वरुप ठरवण्याच्या हेतूने भूगोलाच्या अभ्यासाला शास्त्रीय स्वरुप प्राप्त करुन दिले व खऱ्या अर्थाने भूगोल एक शास्त्र म्हणून अभ्यासण्यास सुरुवात झाली व त्यातूनच भूगोलाच्या वेगवेगळ्या शाखांचा उगम झाला. प्राकृतिक भूगोल, आर्थिक भूगोल, कृषी भूगोल, प्रादेशिक भूगोल, मानवी भूगोल, राजकीय भूगोल इत्यादींचा सविस्तर अभ्यास करणे शक्य झाले.

निसर्गातील विविध घटकांचा व घटनांचा मानवाशी असलेल्या संबंधाच्या दृष्टीकोनातून अभ्यास केला जाऊ लागला. या घडणाऱ्या घटना व त्यांच्याशी निगडीत असणारे घटक यांचा कार्यकारण सहसंबंध अभ्यासण्याच्या हेतूने अनेक पद्धती अवलंबल्या जाऊ लागल्या. उदा. थंड हवामानाच्या ठिकाणी राहणारे लोक ऊबदार लोकरीचे कपडे वापरतात, नद्यांच्या खोऱ्यात सुपीक जमीन आढळते, सुपीक जमिनीच्या ठिकाणी दाट लोकवस्ती आढळते, उंचीनुसार तापमान कमी होत जाते इत्यादी सूचक विधाने मांडत असताना ती सूत्रबद्ध वर्णनावरच आधारीत असतात. हे भौगोलिक सिद्धांत किंवा अनुमान खरे की खोटे हे तपासून पाहण्यासाठी बऱ्याच निरीक्षणांची आवश्यकता असते. मात्र असे सिद्धांत भूगोलशास्त्रामध्ये केवळ वर्णनाने तपासणे शक्य असत नाही. इतर कोणत्याही शास्त्रामध्ये मांडलेल्या सिद्धांताची पडताळणी ही प्रयोगाद्वारे प्रयोगशाळेत तपासून पाहणे शक्य असते. उदा. आम्लता व अल्कधर्मीपणा ओळखण्यासाठी लिटमस पेपरचा वापर केला जातो. मात्र सुपीक जमिनीच्या ठिकाणी दाट लोकसंख्या असते हे प्रयोगाने / प्रयोगशाळेत सिद्ध करता येत नाही तर त्यासाठी प्रत्यक्ष व अचूक निरीक्षणच उपयोगी ठरते असे असले तरी दोन व्यक्तिंनी एकाच गोष्टीच्या / घटकाच्या केलेल्या निरीक्षणामध्ये साधर्म्य असेलच असे नाही. कारण कोणतेही वर्णन निरीक्षकाच्या तौलनिक अनुभवावर व त्याच्या ज्ञानावर अवलंबून असते त्यामुळे एकच घटना दोन निरीक्षक वेगवेगळ्या प्रकारे व्यक्त करतील हे केले जाणारे वर्णन म्हणजे गुणात्मक वर्णन होय. असे गुणात्मक वर्णन भौगोलिक संकल्पना समजावून घेण्यासाठी उपयुक्त ठरत असते. मात्र केवळ गुणात्मक वर्णनाच्या सहाय्याने भूगोलाची व्याप्ती परिपूर्ण होवू शकत नाही. त्यासाठीच भौगोलिक माहितीचे वर्णन जेव्हा सांख्यिकीय माहितीच्या आधारे केले जाते तेव्हा त्याला शास्त्रीय स्वरुप प्राप्त होते. म्हणजेच केवळ वर्णनात्मक माहितीवरुन किंवा गुणात्मक माहितीवरुन त्या घटनेबाबतची / घटकाबाबतच्या परिस्थितीची सत्यता स्पष्ट होवू शकत नाही म्हणूनच अशा वेळी त्या त्या परिस्थितीबाबत संख्याशास्त्रीय माहिती देणे अधिक उचित ठरते. उदा. सिंधुदुर्ग मध्ये पाऊस जास्त पडतो. हे विधान पडणाऱ्या पावसाची स्पष्ट व निश्चित कल्पना देत नाही कारण जास्त म्हणजे किती ? हा प्रश्न कायमच अनुत्तरीत राहतो. असे होवू नये म्हणूनच तेथे संख्याशास्त्राचा वापर करणे अधिक संयुक्तिक ठरते. या आधारेच वरील विधान मांडतना आपण जर सिंधुदुर्गात सरासरी पाऊस १५० से.मी. पडतो असे विधान मांडल्यास त्यावरुन अभ्यासकाला पावसाबाबतचा अचूक अंदाज स्पष्ट होतो. म्हणूनच गुणात्मक माहितीला संख्याशास्त्रीय आधार देणे अतिशय महत्त्वाचे आहे.

संख्याशास्त्रीय माहितीचा आधार घेत असताना भूगोलशास्त्राच्या अभ्यासात अनेक संख्याशास्त्रीय पद्धतींचा / तंत्रांचा अवलंब केला जातो की, ज्यामुळे भूगोलशास्त्राचा अभ्यास आजच्या अभ्यासकांना योग्य प्रकारची दिशा व मार्गदर्शक ठरत आहे. संख्याशास्त्रीय पद्धतींचा / तंत्रांचा अवलंब करत असताना वारंवारिता, सरासरी, मध्यमा, बहुलक, प्रमाणविचलन, विस्तार, सहसंबंध, प्रतिगमन रेषा, कालमालिका, अपस्करण, सरकती सरासरी इत्यादी पद्धती / तंत्रांचा केला जातो.

१.२ वारंवारीता वितरण

भूगोलामध्ये संख्याशास्त्राचा अभ्यास करत असताना वेगवेगळ्या प्रकारचे संशोधन करावे लागते. हे संशोधन करत असताना भूगोलशास्त्रातील अनेक सांख्यिकीय तंत्राचा वापर

करावा लागतो व त्यानंतर वेगवेगळ्या सिद्धांताची निर्मिती होते. असे हे संशोधन वेगवेगळ्या टप्प्यांनी केले जाते व त्यातूनच अचूक असा निष्कर्ष काढला जातो. हे टप्पे पुढीलप्रमाणे -

१) साख्यिकीय आकडेवारी गोळा करणे.

२) योग्य प्रकारे तिची मांडणी करणे.

३) त्याचे परिक्षण करणे.

४) योग्य निष्कर्ष काढणे.

भूगोलामध्ये संशोधनाचे वरिल टप्यांचा उपयोग करुन सांख्यिकीय आकडेवारीचे वर्गीकरण केले जाते. ही सांख्यिकीय आकडेवारी भूगोलामध्ये वेगवेगळ्या प्रकारे उपलब्ध होते.

उदा. प्रदेशाची उंची, लोकसंख्या, पिकाचे उत्पादन इ. चे वर्गीकरण करत असताना प्रामुख्याने दोन महत्त्वाच्या बाबी विचारात घ्यावा लागतात. त्या अशा -

१) चल (Variable)

२) वारंवारिता (Frequency)

१) चल (Variable) - संख्यात्मक माहितीचा अभ्यास करत असताना जी माहिती बदलणारी असते, त्या सांख्यिकीय माहितीला चल म्हणतात. उदा. वर्ष, लोकसंख्या, वयोमर्यादा इ.

चलामध्ये पुढील २ घटकांचा अभ्यास केला जातो.

१) वर्गमर्यादा (Class Limit)

२) वर्गांतर (Interval)

१) वर्गमर्यादा (Class Limit) :

जमा केलेली सांख्यिकीय आकडेवारी आकारमानानुसार विविध वर्गात मांडली जाते. वर्गमर्यादा ठरवत असताना उपलब्ध आकडेवारीतील सर्वात कमी मूल्य व सर्वात जास्त मूल्य दर्शविणाऱ्या संख्येचा विचार करुन वर्गमर्यादांची निश्चिती केली जाते. वर्गमर्यादा ठरवत असताना अनेक गट / वर्ग गट पाडले जातात. यापैकी प्रत्येक गटातील / वर्गातील सर्वात लहान मूल्यांस व सर्वात मोठ्या मूल्यांस त्या वर्गाची वर्गमर्यादा असे म्हणतात. त्यामधील सर्वात लहान मूल्यांस 'कनिष्ठ मर्यादा' (Lower Limit) व सर्वात मोठ्या मूल्यांस 'वरिष्ठ मर्यादा' (Upper Limit) असे म्हणतात. उदा. विद्यार्थ्यांचे गुण व संख्या पुढे दिलेली आहे.

गुण	**विद्यार्थ्यांची संख्या**
१० - २०	०८
२० - ३०	१५
३० - ४०	०५

वरील उदाहरणामध्ये गुण दर्शविण्यासाठी वर्गमर्यादा / वर्गगट घेतले आहेत. त्यामध्ये १० - २० या वर्गगटात ८ विद्यार्थ्यांना १० ते २० गुण मिळालेले आहेत. यामध्ये १० ही कनिष्ट मर्यादा व २० ही वरिष्ठ मर्यादा ठरते.

या वर्गमर्यादेचे दोन प्रकार पडतात.

१) खंडीत श्रेणी / वर्गमर्यादा (Discontinued)

२) अखंडीत श्रेणी / वर्गमर्यादा (Continued)

१) खंडीत श्रेणी / वर्गमर्यादा (Discontinued) :

साधनसामुग्रतील वारंवारीता सारणी तयार करताना दिलेल्या प्रत्येक चलाचे मूल्य मोजावे लागते व त्याची सारणी तयार करावी लागते. अशी सारणी करताना प्रत्येक मूल्य हे एकमेकांपेक्षा वेगळे असते. त्यामध्ये सलगता नसते. ते विशिष्ट मूल्य त्याच मूल्याचे प्रतिनिधीत्व करते. अशावेळी तयार केलेल्या श्रेणीला खंडीत श्रेणी असे म्हणतात. उदा. भूगोलाच्या १५ विद्यार्थ्यांचे गुण पुढे दिलेले आहेत.

गुण	**विद्यार्थ्यांची संख्या**
३५	२
४०	३
४५	२
५५	४
७०	३
८७	१
एकूण	१५

२) अखंडीत श्रेणी / वर्गमर्यादा (Continued) :

अखंडीत वर्गमर्यादेमध्ये कोणत्याही वर्गाची वरिष्ठ मर्यादा ही त्या पुढील वर्गाची नेहमी कनिष्ठ मर्यादा असते. ही श्रेणी खंडीत पावलेली नसते. म्हणून या श्रेणीला अखंडीत किंवा सलग श्रेणी म्हणतात. या श्रेणीमध्ये ज्या वर्गमयादेची निवड केलेली असते त्या वर्गमर्यादेतील कनिष्ठ मर्यादेच्या मूल्यापासून वरिष्ठ मूल्यापर्यंतच्या येणाऱ्या सर्व मूल्यांचे मोजमापन केले जाते. मात्र वरिष्ठ मर्यादेचे मूल्य हे त्या पुढील वर्गाची कनिष्ठ मर्यादा ठरत असल्याने ते पुढील वर्गात / मर्यादेत समाविष्ट केले जाते. उदा. पुढे विद्यार्थ्यांचे गुण व विद्यार्थ्यांची संख्या सलग श्रेणीमध्ये दिलेले आहेत.

गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या
१० - २०	१७
२० - ३०	०८
३० - ४०	१०

२) वर्गांतर (Interval) :

एखाद्या वर्गाची वरिष्ठ मर्यादा व कनिष्ठ मर्यादा यातील फरकाला वर्गातर असे म्हणतात. उदा. १०-२०, २०-३०, ३०-४० किंवा १०-१९, २०-२९, ३०-३९.

म्हणजेच १०-२० किंवा १०-१९ या मधील फरक १० आहे म्हणून या वर्गाचे वर्गांतर १० आहे.

२) वारंवारिता (Frequency) :

एखाद्या वर्गमर्यादेमध्ये येणारे मूल्य पुन:पुन्हा किती वेळा आलेले आहे. याची मोजदाद करणे म्हणजे वारंवारीता होय. ठराविक वर्गमर्यादेमधील परत परत आलेल्या मूल्यांच्या संख्येला वारंवारीता असे म्हणतात.

गुण	विद्यार्थ्यांची संख्या (f)
१० - २०	१७
२० - ३०	०८
३० - ४०	१०
४० - ५०	०५

वरील उदाहरणामधील विद्यार्थ्यांची संख्या म्हणजेच वारंवारिता होय. याचाच अर्थ असा की १०-२० गुण मिळविणाऱ्या विद्यार्थ्यांची एकूण संख्या १७ एवढी आहे. तर ४०-५० च्या दरम्यान असणारे गुण केवळ ५ विद्यार्थ्यांनी मिळवलेले आहेत.

वारंवारिता वितरण सारणी -

वारंवारिता वितरण सारणी म्हणजेच दिलेल्या सामुग्रीसाठी योग्य असे वर्गांतर घेऊन त्या प्रत्येक वर्गामध्ये समाविष्ट होणाऱ्या मूल्याची मोजदाद घेऊन त्या प्रत्येक वर्गासमोरील रकान्यात दंड चिन्हांच्या सहाय्याने नोंद केली जाते त्या सारणीला वारंवारिता वितरण सारणी असे म्हणतात.

सिंधुदुर्ग जिल्ह्यातील ५० शेतकऱ्यांचे भातशेतीचे दर एकरी उत्पादन किलोग्रॅम मध्ये दिलेले आहे. १०-२०, २०-३० हे वर्गांतर घेऊन वारंवारिता सारणी तयार करा.

५०, ४७, ४८, ५५, ४०, ३६, ३२, १३, २०, २५,

५७, ६०, ४५, ५३, ६४, १२, ३३, ३८, २२, २७,

५४, ३५, ३९, ४५, ४९, ३६, ४५, ४०, ५९, ४९,

२८, २७, २०, २८, ३१, १५, ५८, ४०, ३७, ५२,

४४, २७, ३४, ५४, २५, ३४, ५०, ३६, १९, १४,

वारंवारिता वितरण सारणी -

वर्ग	दंडचिन्हे	वारंवारिता
१० - २०	IIII̸	०५
२० - ३०	IIII̸ IIII̸	१०
३० - ४०	IIII̸ IIII̸ II	१२
४० - ५०	IIII̸ IIII̸ I	११
५० - २०	IIII̸ IIII̸	१०
२० - ७०	II	०२
एकूण		५०

४) संचित वारंवारिता वितरण सारणी -

वारंवारिता वितरण सारणीवरुन प्रत्येक वर्गमर्यादेमध्ये किती घटकमूल्ये आहेत हे समजते. ज्यावेळी पहिल्या वर्गाची वारंवारिता दुसऱ्या वर्गाच्या वारंवारितेत मिळविली जाते व येणारी बेरीज त्या वर्गासमोर लिहितात. त्या बेरजेत तिसऱ्या वर्गाची वारंवारिता जमा करतात ती तिसऱ्या वर्गाच्या समोर लिहितात. याप्रमाणे प्रत्येक पुढच्या वर्गाची बेरीज काढण्यासाठी मागील वर्गाची एकूण बेरीज व त्या वर्गाची वारंवारिता याप्रमाणे बेरजा केल्या जातात त्यालाच संचित वारंवारिता (cf) असे म्हणतात.

संचित वारंवारिता सारणीचे २ प्रकार -

१) पेक्षा कमी संचित वारंवारिता (Less than cumulative frequency)

२) पेक्षा जास्त संचित वारंवारिता (More than cumulative frequency)

१) पेक्षा कमी संचित वारंवारिता (Less than cumulative frequency) -

ज्यावेळी वारंवारिता सारणीमध्ये कमी वर्गांतराकडून जास्त वर्गांतराच्या वारंवारितेकडे वारंवारितेची बेरीज करत गेल्यावर तयार होणाऱ्या वारंवारितेस पेक्षा कमी संचित वारंवारिता म्हणतात. या सारणीमध्ये पहिल्या वर्गाची एकूण वारंवारिता ही त्यापुढील वर्गाच्या एकूण वारंवारितेपेक्षा कमी असते.

२) पेक्षा जास्त संचित वारंवारिता (More than cumulative frequency) -

ज्यावेळी दिलेल्या वारंवारिता सारणीमध्ये एकूण वारंवारिता ही सर्वात कमी वर्गांतराच्या समोर लिहिली जाते व त्यामधून पहिल्या म्हणजेच त्याच वर्गाची असणारी वारंवारिता वजा केली जाते व येणारे उत्तर त्यापुढील म्हणजेच दुसऱ्या वर्गांतरासमोर लिहिली जाते. या उत्तरातून पुन्हा दुसऱ्या वर्गाची वारंवारिता वजा केली जाते व ती तिसऱ्या वर्गाची संचित वारंवारिता म्हणून लिहिली जाते. याप्रमाणे प्रत्येक वर्गाची वारंवारिता ही त्यामधून वजा करुन मांडलेल्या वारंवारीतेला पेक्षा जास्त संचित वारंवारिता असे म्हणतात. पेक्षा जास्त संचित वारंवारीतेमध्ये नेहमी त्या वर्गाची वारंवारिता ही त्यापुढील वर्गाच्या वारंवारितेपेक्षा जास्त असते.

संचित वारंवारितेचे भौगोलिक विश्लेषणात महत्त्व -

१) दिलेल्या आकडेवारीचे विश्लेषण करण्यासाठी संचित वारंवारिता सारणी उपयोगी ठरते.

२) संचित वारंवारिता वक्र तयार करण्यासाठी / कमानी वक्र तयार करण्यासाठी सचित वारंवारिता सारणी उपयोगी ठरते.

३) दिलेल्या साधनसामुग्रीतील / वितरणातील तफावत संचित वारंवारिता सारणीवरुन लक्षात येते.

४) मध्यमा, चतुर्थक, दशमके काढण्यासाठी संचित वारंवारिता उपयोगी ठरते.

खालील दिलेली आकडेवारी सिंधुदुर्ग जिल्ह्यातील ५० खेड्यांचे पर्जन्य वितरण दर्शविते. त्यावरुन २० -३०, ३० - ४०, ४० - ५०, हे वर्गांतर घेवून संचित वारंवारिता वितरण सारणी तयार करा.

६९, ३८, ३६, ४६, ४३, ३०, ६२, ३५, ४५, ४६, ३३,

२८, २७, ६४, २९, ४१, ३९, ५०, ४४, ४६, ५०, ३०,

२५, ४८, ३५, ३३, ३१, ३२, ३६, ३६, ३१, ३४, ४५,

४९, ४३, ४८, ३९, ४१, ६७, ५३, ६९, ३६, ५०, ३७,

२२, ४३, ४४, ४७, ४६, ३७,

वर्ग	दंडचिन्हे	वारंवारिता	पेक्षा कमी संचित वारंवारिता	पेक्षा जास्त संचित वारंवारिता
२० - ३०	𝍸	०५	५	५०
३० - ४०	𝍸 𝍸 𝍸 IIII	१९	२४	४५
४० - ५०	𝍸 𝍸 𝍸 II	१७	४१	२६
५० - ६०	IIII	०४	४५	९
६० - ७०	𝍸	०५	५०	५
एकूण		५०		

१.३ वारंवारिता वितरणाचे आलेखात्मक चित्रण

वारंवारिता वितरण सारणीवरुन जर आपण आलेख तयार केला. तर त्या आलेखावरुन दिलेल्या आकडेवारीची बरीच माहिती स्पष्ट होते. ही माहिती अधिक स्पष्ट करण्यासाठी आकडेवारीची गरज वारंवारितेचे गुणात्मक चित्रण करुन भौगोलिक घटकांविषयी स्पष्ट माहिती मिळविण्यासाठी आलेख पद्धतीचा वापर केला जातो. खालील पद्धतीद्वारे वारंवारितेचे वितरण आलेखात्मक पद्धतीने दाखवता येते.

१) स्तंभालेख (Histogram)

२) वारंवारिता बहुभुजाकृती आलेख (Frequency Polygon)

३) वारंवारिता वक्र (Frequency Curve)

४) संचित वारंवारिता वक्र (Cumulative Frequency Curve / Ogive)

१) स्तंभालेख / वारंवारिता आलेख (Histogram) : दिलेल्या आकडेवारीचा वारंवारितेचे वितरण आलेख कागदावर स्तंभाच्या सहाय्याने दर्शविल्यास तयार होणाऱ्या आकृतीला स्तंभालेख असे म्हणतात.

स्तंभोलख तयार करत असताना 'क्ष' अक्षावर वर्गांतर (वर्गमर्यादा) घेतली जाते. तर 'य' अक्षावर वारंवारिता दर्शविली जाते. स्तंभालेख तयार करताना प्रत्येक स्तंभाची जाडी किंवा रुंदी सारखीच असली पाहिजे व ते सर्व स्तंभ एकमेकांना चिकटून असले पाहिजेत. स्तंभाच्या उंचीमध्ये मात्र वारंवारितेच्या वितरणानुसार बदल होतो.

स्तंभालेखाचे भौगोलिक विश्लेषणातील महत्त्व -

१) स्तंभालेखावरुन वारंवारितेच्या वितरणाचे स्वरुप चटकन लक्षात येते.

२) वारंवारितेचे केंद्रीकरण मध्यभागी किंवा एका टोकाला झालेले असेल तर ते लक्षात घेवून तीचे अतिकेंद्रीकरण व विकेंद्रीकरण समजते.

३) स्तंभालेखाद्वारे बहुलक काढता येतो.

४) घटकांचा तुलनात्मक अभ्यास करता येतो.

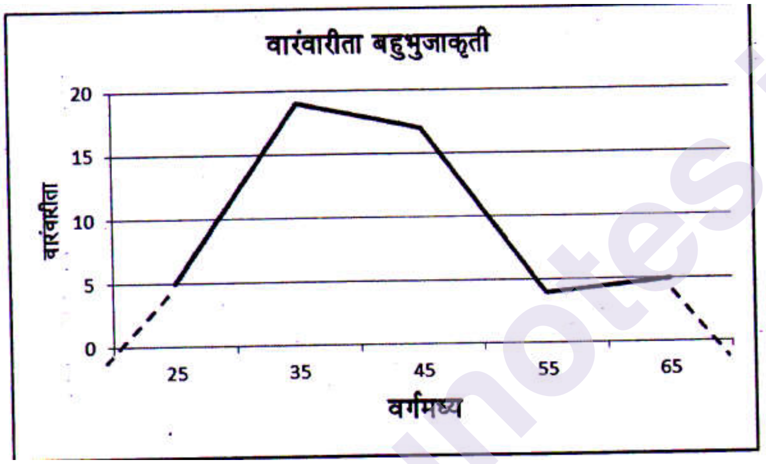
५) स्तंभालेखाद्वारे वितरणामधील विषमता कोणत्या प्रकारची आहे हे समजते.

उदा. स्तंभालेखाद्वारे बहुलक काढत असताना बहुलक हा उजवीकडे केंद्रीत झाला असेल तर त्याला ऋण विषमता असे म्हणतात. या उलट तो डावीकडे केंद्रीत झाला असेल तर त्याला धन विषमता असे म्हणतात.

आलेख -

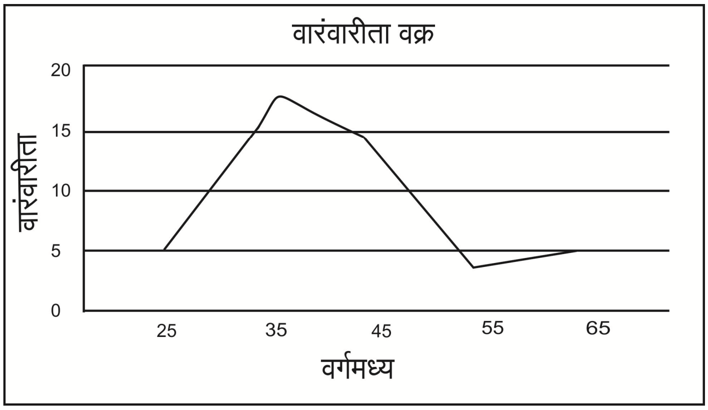
२) वारंवारिता बहुभुजाकृती आलेख (Frequency Polygon) : दिलेल्या आकडेवारीतील वारंवारितेचे वितरण आलेख कागदावर योग्य प्रमाणानुसार रेषालेखाद्वारे दर्शविल्यास तयार होणाऱ्या आकृतीला बहुभूजाकृती असे म्हणतात.

वारंवारिता बहुभूजाकृती तयार करताना 'क्ष' अक्षावर वर्गमध्य तर 'य' अक्षावर वारंवारिता दर्शविली जाते. दिलेल्या आकडेवारीनुसार बिंदू निश्चित करुन ते बिंदू एकमेकांना क्रमश: रेषेच्या सहाय्याने जोडले जातात. ते जोडतना पट्टीचा वापर केला जातो. अशा रेषालेखाला अनेक बाजू असल्याने तिला बहुभूजाकृती म्हणतात.



३) वारंवारिता वक्र (Frequency Curve) :

वारंवारिता वक्र हा रेषालेखाचाच एक प्रकार आहे. पण यामध्ये कोणत्याही भुजा न दर्शविता आलेखाचा आकार न बदलता बिंदू एकमेकांना हाताने जाडले जातात व त्यावरुन तयार होणाऱ्या वक्रालाच वारंवारिता वक्र असे म्हणतात.



वारंवारिता बहुभूजाकृती व वारंवारिता वक्राचे भौगोलिक विश्लेषणात महत्त्व -

१) वारंवारिता वितरणाची कल्पना चटकन लक्षात येते.

२) तुलनात्मक अभ्यास करता येतो.

३) वारंवारितेचे केंद्रीकरण कोणत्या बाजूला झालेले आहे हे समजते.

४) क्षेत्र निश्चित करता येते.

खालील आकडेवारी काही निवडक ठिकाणांची उंची मिटर मध्ये दर्शविली आहे. त्यावरुन ० - २०, २० - ४०, हे वर्गांतर घेवून वारंवारिता वितरण सारणी, स्तंभालेख, वारंवारिता बहुभूजाकृती आलेख व वारंवारिता वक्र तयार करा.

२७, ३७, ७७, ०८, २८, २७, ५२, २२, ११०,

१३, ५६, ८७, १६, ११८, ३९, १९, ९५, ०८,

२२, १००, ३५, ११, ७५, ८५, ५६, ७७, १६,

२८, १०९, १७, ०५, ८७, ०९, ७७, २९, ०६,

४८, ४९, ४२, ५७, ०६, २४, ६३, ७५, १८,

६६, ३७, ७७, ३३, ०८,

वर्ग	दंडचिन्हे	वारंवारिता
० - २०	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~ ||	१७
२० - ४०	~~||||~~ ~~||||~~ ||	१२
४० - ६०	~~||||~~ ||	०७
६० - ८०	~~||||~~ ||	०७
८० - १००	||||	०४
१०० - १२०	||||	०४

आलेख -

४) संचित वारंवारिता वक्र (Cumulative Frequency Curve / Ogive) : ज्यावेळी वारंवारितेच्या वितरणावरुन संचित वारंवारितेच्या आकडेवारीच्या उपयोग करुन ती आलेखावर रेषेच्या साहाय्याने दर्शविली जाते व त्यातून तयार होणाऱ्या आकृतीला संचित वारंवारिता वक्र असे म्हणतात. हा वक्र दोन प्रकारचा असतो.

१) पेक्षा कमी कमानी वक्र / संचित वारंवारिता वक्र

२) पेक्षा जास्त कमानी वक्र / संचित वारंवारिता वक्र

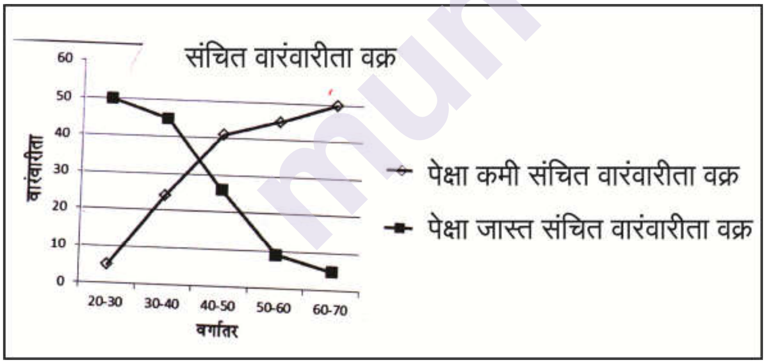
१) पेक्षा कमी कमानी वक्र / संचित वारंवारिता वक्र :

हा वक्र तयार करत असताना वारंवारितेची कमी वर्गातराकडून जास्त वर्गांतराकडे बेरीज केली जाते. आलेली संचित वारंवारिता त्या वर्गमर्यादेमधील वरिष्ठ मर्यादेला प्रमाण घेऊन / मानून बिंदू निश्चित केले जातात व हे बिंदू रेषेत जोडले जातात त्यावरुन तयार होणाऱ्या वक्राला पेक्षा कमी संचित वारंवारिता वक्र असे म्हणतात.

२) पेक्षा जास्त कमानी वक्र / संचित वारंवारिता वक्र :

ज्यावेळी दिलेल्या वारंवारिता सारणीमध्ये एकूण वारंवारिता ही सर्वात कमी वर्गांतराच्या समोर लिहिली जाते व त्यामधून पहिल्या म्हणजेच त्याच वर्गाची असणारी वारंवारिता वजा केली जाते व येणारे उत्तर त्यापुढील म्हणजेच दुसऱ्या वर्गांतरासमोर लिहिले जाते. या उत्तरातून पुन्हा दुसऱ्या वर्गाची वारंवारिता वजा केली जाते व ती तिसऱ्या वर्गाची संचित वारंवारिता म्हणून लिहिली जाते. याप्रमाणे प्रत्येक वर्गाची वारंवारिता ही त्यामधून वजा करुन मांडलेल्या वारंवारीतेला पेक्षा जास्त संचित वारंवारिता असे म्हणतात. पेक्षा जास्त संचित वारंवारितमध्ये नेहमी त्या वर्गाची वारंवारिता ही त्यापुढील वर्गाच्या वारंवारितेपेक्षा जास्त असते.

हा वक्र तयार करताना वारंवारितेची एकूण बेरी ही पहिल्या वर्गाच्या कनिष्ठ मर्यादेला प्रमाण घेऊन मांडली जाते व त्यापुढे प्रत्येक वर्गाची जास्त वर्गांतराकडून कमी वर्गांतराकडे बेरीज केली जाते व आलेली संचित वारंवारिता त्या वर्गमर्यादेमधील कनिष्ठ मर्यादा घेऊन बिंदू निश्चित केले जातात व ते बिंदू रेषेच्या सहाय्याने जोडले जातात. त्यालाच पेक्षा जास्त संचित वारंवारिता वक्र / कमानी वक्र असे म्हणतात.



संचित वारंवारिता वक्राचे भौगोलिक विश्लेषणात महत्त्व :

१) संचित वारंवारिता वक्राद्वारे वितरणाचे अखंड चित्र उभे राहते.

२) संचित वारंवारिता वक्राद्वारे मध्यगा काढता येते.

३) संचित वारंवारिता वक्राद्वारे चतुर्थके व दशमके काढता येतात.

४) संचित वारंवारिता वक्राद्वारे मध्यगापेक्षा कमी व जास्त किंमत लक्षात येते.

५) भौगोलिक विश्लेषण करण्यासाठी या वक्राचा उपयोग होतो.

१.४ केंद्रीय प्रवृत्ती मापनाच्या पद्धती

एखाद्या भौगोलिक प्रदेशाची आकडेवारी फार गुंतागुंतीची असतो. अशा सांख्यिकीय आकडेवारीवरुन किंवा विविध प्रकारच्या तक्त्यावरुन भौगोलिक किंवा आर्थिक घटकाचे स्पष्टीकरण करता येत नाही. आकडे इतके असतात की कशाची तुलना करावयाची आहे हे समजणे फार कठीण जाते. त्याच्यासाठी संख्याशास्त्रीय पद्धतीचा अवलंब भूगोलामध्ये करावा लागतो. एखाद्या प्रदेशाच्या किंवा ठिकाणच्या हवामानाचे वर्गीकरण करताना आपण तेथील हवामान घटकाची सरासरी लक्षात घेतो. उदा. सरासरी तापमान, सरासरी पर्जन्य इत्यादी या संख्या (सरासरी) त्या त्या घटकाचे निरीक्षण करुन काढलेल्या असतात व या संख्या त्या त्या घटकांचे प्रतिनिधीत्व (प्रातिनिधीक प्रतिपादन) करीत असतात. म्हणूनच भौगोलिक अभ्यासास अशा प्रातिनिधीक स्वरुपाची मदत होत असते.

मध्यवर्ती प्रवृत्ती किंवा केंद्रीय प्रवृत्ती -

सरासरी -

'सरासरी' हे एक साधन सामुग्रीचे प्रतिनिधीत्व करणारे प्रतिक होय. त्यास केंद्रिय प्रवृत्तीचे परिमाण असे म्हटले जाते. दिलेल्या आकडेवारीवरुन ठरविलेला व त्या आकडेवारीचे प्रतिनिधीत्व करणारा अंक म्हणजे त्या आकडेवारीचे परिमाण होय. ठराविक आकड्यांच्या प्रणालीचे किंवा एका पेक्षा जास्त आकड्यांच्या समुदायाचे स्पष्टीकरण केवळ एक संख्या करते. याला सरासरी असे म्हणतात. एका विधानाद्वारे गुंतागुंतीची आकडेवारी असलेल्या गटाचे केंद्रीकरण केले जाते. भूगोलाच्या अभ्यासात विविध घटकांचा अभ्यास केलेला असतो. काही घटक असे असतात की स्थलकालानुरुप (तापमान, पर्जन्य, पिके, वनस्पती) सतत बदलत असतात. कोणत्याही ठिकाणी संग्रहीत साधनसामुग्रीचे वर्गीकरण केले तरी त्याच्याविषयी एखादा निर्णय घेणे अवघड असते. परंतु सर्वसाधारणपणे त्या साधनसामुग्रीचे मध्य काढल्यास निर्णय घेणे अवघड असते.परंतु सर्वसाधारणपणे त्या साधनसामुग्रीचे मध्य काढल्यास निर्णय घेणे सुलभ जाते. म्हणजेच प्रातिनिधीक संख्या काढणे हे संख्याशास्त्रातील महत्त्वाची बाजू किंवा तंत्र आहे. या प्रातिनिधीक संख्येलाच (माध्य) केंद्रीय प्रवृत्ती असे म्हणतात.

उदा. एखाद्या ठिकाणचे वार्षिक पर्जन्यमानाचा विचार केल्यास आपणास त्या निरीक्षण कालावधीतील सर्वच वर्षाचे पर्जन्याचे आकडे लक्षात ठेवणे सहज शक्य नसते. म्हणून सरासरीच्या सहाय्याने आपण पर्जन्यमान सांगू शकतो. (कोकणात २५० से.मी. पाऊस पडतो) ही सरासरी त्या घटकाचे प्रातिनिधीत्व करीत असते. सरासरी हा एक विविध प्रकारचा घटक असून तो एका गटाचे प्रातिनिधीत्व करतो. दिलेल्या संग्रहीत प्रणालीचे मापन करतो. संख्याशास्त्रीय सरासरी संबंधी दोन हेतू असते. पहिला हेतू म्हणजे दिलेल्या आकडेवारीचे प्रातिनिधीत्व करणे व दुसरा हेतू म्हणजे विविध घटकातील तुलना करणे होय.

मध्यवर्ती प्रवृत्ती मापनाच्या पद्धती -

अ) सरासरी समांतर माध्य

ब) मध्यमा मध्यका / मध्यगा

क) बहुलक

१.५ सरासरी समांतर किंवा गणित माध्य

संख्याशास्त्रातील सर्वात सोपी पद्धत असून हीचा वापर मोठ्या प्रमाणात केला जातो. एखाद्या पदमालेच्या समस्त पदातील संख्याच्या बेरजेला त्या पदमालेतील पदसंख्येने भाग दिल्यावर जे परिमाण येते त्याला सरासरी असे म्हणतात किंवा सर्व घटकांच्या किंमतीची बेरीज करुन त्यास घटकांच्या संख्येने भागले असता जे गुणोत्तर येते त्यास समांतर माध्य असे म्हणतात. सरासरी केंद्रीय प्रवृत्तीचे असे एकमेव परिमाण आहे की ते सर्व वितरण मूल्यावर आधारीत असते.

समांतर माध्य काढण्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

सूत्र

१) $\overline{x} = \sum x/n$

२) $\overline{x} = \sum fx/n$

३) $\overline{x} = \sum fm/n$

४) $\overline{x}$ = सरासरी (mean)

५) $\sum$ = बेरजेचे चिन्ह (Summation sign)

६) x = मूल्य (Value)

७) f = वारंवारिता (Frequency)

८) M = मूल्य (midpoint)

९) N = एकूण वारंवारिता (Total Frequency)

१०) $\sum x$ = मूल्यांची बेरीज

(टिप - फक्त एकच घटक असताना हे सूत्र वापरावे)

$\overline{x} = \sum x/n$

समांतर माध्य = घटकांच्या किंमतीची बेरीज / घटकांची संख्या

$\overline{x}$ = समांतर माध्य

$\sum$ = (समेशन) बेरीज

$\sum x$ = सर्व परिमाणांची बेरीज किंवा घटकांच्या किंमतीची बेरीज

N = पदांची संख्या

उदा. १) S.Y.B.A. च्या वर्गातील ३१ विद्यार्थ्यांस पुढील प्रमाणे मार्क मिळाले त्याच्यावरुन समांतर माध्य काढा.

विषय	**गुण**
ES	७३
Geo	८०
Marthi	४२
Hindi	४८
English	३५
BC	४२
एकूण	$\sum x = ३२०$

$\sum x = ३२०$

N = ६ (विषयांची संख्या =६)

$\bar{x} = \sum x/n$

$\sum x = ३२०/६$

$\bar{x} = ५३.३३$

सरासरी = ५३.३३

२) एका शहरातील १० कुटुंबाचे मासिक उत्पन्न दिलेले आहे त्याच्यावरुन समांतर मध्य काढा.

कुटुंब	**मासिक उत्पन्न**
१	२८०
२	१८०
३	९६
४	९८
५	१०४
२	२५
७	८०
८	१००
९	६००
१०	२००
एकूण	१८६३

$\sum x = १८६३$

$N = १०$

$\bar{x} = \sum x/n$

$\bar{x} = १८६३/१०$

$\bar{x} = १८६.३०$

सरासरी =१८६.३०

समांतर मध्य काढण्याच्या पद्धती - समांतर माध्य काढण्यासाठी दोन पद्धतींचा उपयोग केला जातो. त्या पद्धती पुढीलप्रमाणे -

१) ऋजुरीती / पद्धती

२) लघुरीती / पद्धती

१) **ऋजुरीती / पद्धती :**

साधनसामुग्रीमध्ये किंवा दिलेल्या साधनसामुग्रीमध्ये मूल्य किंवा वारंवारिता दिलेली असल्यास या पद्धतींचा वापर दोन पद्धतीने केला जातो.

१) खंडीत श्रेणी

२) अखंडीत श्रेणी

१) खंडीत श्रेणी :

या श्रेणीमध्ये समांतर माध्य काढतना खालील सुत्राचा वापर केला जातो.

x = मूल्य (Value)

f = वारंवारिता (Frequency)

N = एकूण वारंवारिता (Total Frequency)

$\sum fx$ = मूल्यांची बेरीज

उदा. १) ४० विद्यार्थ्यांचे मार्क खाली दिलेले आहेत त्यावरुन समांतर माध्य काढा.

मार्क्स	**विद्यार्थी**	**fx**
२०	६	१२०
३०	८	२४०
४०	११	४४०
५०	७	३५०
६०	४	२४०
७०	४	२८०
एकूण	४०	१६७०

$\sum fx =$ १६७०

$N =$ ४०

$\bar{x} = \sum x/n$

$\bar{x} =$ १६७०/४०

$\bar{x} =$ ४१.७५

समांतर माध्य = ४१.७५

उदा. २) पुढे दिलेल्या आकडेवारीवरुन समांतर माध्य काढा.

मूल्य	वारंवारिता	$\sum fx$
१०	२	२०
१५	४	६०
२०	६	१२०
२५	१२	३००
३०	६	१८०
३५	४	१४०
४०	२	८०
एकूण	३६	९००

$\sum fx =$ ९००

$N =$ ३६

$\bar{x} = \sum x/n$

$\bar{x} =$ ९००/३६

$\bar{x} =$ २५

समांतर माध्य = २५

२) अखंडीत सलग श्रेणी :

भौगोलिक आकडेवारी अखंड पदमालेत जर ऋजु पद्धतीत असेल तर खालीलप्रमाणे सरासरी काढतात.

पायऱ्या -

अ) प्रथमत: दिलेल्या गटाचे किंवा वर्गाचे वर्गमध्य काढणे.

ब) वर्गमध्य व वारंवारिता यांचा गुणाकार करणे.

क) वर्गमध्य व वारंवारिता यांचा गुणाकार केल्यानंतर त्याची बेरीज करणे.

ड) आलेल्या बेरजेला एकूण वारंवारीतने भागणे.

इ) येणारा भागाकार म्हणजे समांतर माध्य होय.

उदा. १) खालील दिलेल्या आकडेवारीवरुन समांतर माध्य काढा.

३०	४७	३७	३८	३६	३५	४४	३२	३१	२०
२२	२७	५४	४५	२७	३	३६	२८	५८	४०
५०	३१	१३	२८	१५	४३	२	३७	२७	११
३७	११	४६	४४	३	२९	३०	१	४१	३२
५१	४७	३२	२	३४	३९	२१	४२	१२	२३
१३	३८	४५	३३	१५	२०	२३	१६	२७	३९
४६	४८	१८	२९	२७	४३	३३	२०	३८	४०
३९	२४	३५	२१	३४	२९	२९	४२	४१	२२
१९	५२	५३	३५	५६	४८	५७	३३	३१	५९
४९	३६	२०	५५	२९	३४	२७	४९	२५	३०

या श्रेणीसाठी खालील सूत्राचा वापर केला जातो.

$x = \sum fm / n$

x = समांतर माध्य

$\sum$ = बेरीज

m = वर्गमध्य

fm = वारंवारिता *f* वर्गमध्य

$\sum fm$ = मूल्यांची गुणाकार केल्यानंतर बेरीज

मूल्य	**वारंवारिता**	**वर्गमध्य**	$\sum fm$
० - १०	५	५	२५
१० - २०	१०	१५	१५०
२० - ३०	२५	२५	६२५
३० - ४०	३०	३५	१०५०
४० - ५०	२०	४५	९००
५० - ६०	१०	५५	५५०
एकूण	१००		३३००

$\sum fm = ३३००$

$N = १००$

$\bar{x} = \sum fm/n$

$\bar{x} = ३३००/१००$

$\bar{x} = ३३$

समांतर माध्य = ३३

२) लघुरीती - समांतर माध्य काढण्यासाठी या पद्धतीचाही वापर केला जातो. या पद्धतीत दिलेल्या मुल्यातून एक समान संख्या वजा केली जाते व तयार झालेली सुधारीत मूल्ये किंवा आकडे लहान बनतात. त्यांना वारंवारीतेने गुणुन त्या गुणाकाराची बेरीज केली जाते म्हणजेच व पुढील सूत्राचा उपयोग करुन समांतर माध्य काढले जाते.

१) खंडीत श्रेणी -

$\bar{x} = A + \sum fd/N$

किंवा

$\bar{x} = A + \sum fd/N \times C$

$A =$ गृहीत माध्य

$f =$ वारंवारिता

$d =$ मूल्य - गृहीत माध्य

$N =$ एकूण वारंवारिता

$C =$ Common Factor

पायऱ्या -

अ) प्रथम मूल्यातील कोणतेही एक मूल्य / संख्या गृहीत माध्य धरावे.

ब) प्रत्येक मूल्यातून गृहीत माध्य वजा करुन d काढून घ्यावा.

क) मूल्यातून गृहीत माध्य वजा केल्यावर आलेल्या प्रत्येक मूल्याला / d ला गटातील वारंवारीतेने गुणावे.

ड) शेवटी सर्वांची बेरीज करणे.

इ) येणाऱ्या बेरजेस एकूण वारंवारीतने भागल्यास जो भागाकार येतो त्यात माध्य मिळवून समांतर माध्य तयार होते.

उदा. १)

मार्क्स	विद्यार्थी	d	Fd
२०	८	- २० (२० - ४०)	- १६०
३०	१२	- १० (३० - ४०)	- १२०
४०	२०	- ०० (४० - ४०)	००
५०	१०	+ १० (५० - ४०)	+ १००
६०	६	+ २० (६० - ४०)	+ १२०
७०	४	+ ३० (२० - ४०)	+ १२०
	६०		२०

$\bar{x} = A + \sum fd/N$

= ४० + ६० / ६०

= ४० + १ / १

= ४१

उदा. २) अखंडीत श्रेणी

$\bar{x} = A + \sum fd/N$

A = गृहीत माध्य

f = वारंवारिता

d = मूल्य - गृहीत माध्य

N = एकूण वारंवारिता

उदा. २)

मार्क्स	विद्यार्थी	वर्गमध्य	d	fd
० - १०	५	५	- २०	- १००
१० - २०	१०	१५	- १०	- १००
२० - ३०	२५	२५	००	००
३० - ४०	३०	३५	१०	३००
४० - ५०	२०	४५	२०	४००
५० - २०	१०	५५	३०	३००
	१००			८००

$\bar{x} = A + \sum fd/N$

$= २५ + ८०० / १००$

$= २५ + ८$

$= ३३$

समांतर माध्याचे गुण / दोष

समांतर माध्याचे गुण / फायदे -

समांतर माध्याचा मोठ्या प्रमाणावर उपयोग केला जातो.

१) समजण्यास सोपे :

समांतर माध्य काढण्यासाठी प्रत्येक पद्धत सोपी असल्याने ती ताबडतोब लक्षात येते म्हणजेच समांतर माध्य समजण्यास सोपी आहे.

२) गणनेस सापे :

ही पद्धत इतर काही पद्धतीपेक्षा काढण्यास सोपी आहे. सहजासहजी लक्षात येते माध्याचा अर्थ सामान्य वाचकाला सुद्धा स्पष्ट होत असल्याने वापरतेवेळी जास्त खुलाश्याची आवश्यकता भासत नाही.

३) सर्व घटक मूल्यांवर आधारीत :

गणित माध्य काढण्यासाठी सर्व मूल्यांची किंवा किंमतीची बेरीज करावी लागते. उपलब्ध संख्यात्मक माहितीचे पृथ:करण करुन माध्य ठरविले जाते. म्हणजेच पदावलीतील पदाचा किंवा मूल्यांचा विचार केला जातो. म्हणूनच येणारे समांतर माध्य सर्व घटकांवर अवलंबून असते.

४) बेरजा करता येतात :

समांतर माध्यावर नंतर बैजीक क्रिया करता येतात. बीजगणित सूत्रात याचा वापर मोठ्या प्रमाणात करता येतो.

५) नमुना स्थैर्यता :

पदावलीतील पदांची संख्या वाढली तरी त्याचा माध्यावर फारसा परिणाम होत नाही. त्याचे मूल्य स्थिर असते. उपलब्ध संख्यात्मक माहितीचे पृथ:करण करुन माध्य काढले जात असल्याने ते निश्चित व ठाम असते. याला नमुना स्थैर्यता असे म्हणतात.

दोष / तोटे / मर्यादा -

समांतर माध्याचे मोठ्या प्रमाणात फायदे असले तरी त्याच्यावर काही मर्यादा पडलेल्या दिसून येतात. त्या खालील प्रमाणे आहेत.

१) टोकाच्या संख्येत बदल झाला तर त्याचा माध्यावर परिणाम होतो. विशेषत: पदाची संख्या कमी असल्यास हे अधिक घडते.

२) मोठ्या अंकाला जास्त महत्त्व तर लहान अंकाला कमी महत्त्व येते.

३) बऱ्याचदा माध्य हे ज्या अंकावरुन काढले जाते त्यापेक्षा ते वेगळे असते. उदा. २, ९, ३ = १४/३ = ४.६६

४) वर्गाची कालमर्यादा दिलेली नसेल तर वर्गमध्य काढता येत नाही. त्याचा परिणाम समांतर माध्यावर होत असतो.

५) जास्त अचूकतेच्या दृष्टीकोनातून एखादी संख्या दुर्लक्षित जाण्याची शक्यता असते.

६) सहज व्यक्त न करता येण्यासारख्या गुणवैशिष्ट्यासाठी माध्याचा वापर करता येत नाही. उदा. मानवाची बुद्धि, आरोग्य इत्यादी.

७) सहज निरीक्षणातून ते प्राप्त होत नाही. वारंवारिता आलेखामध्येही दाखविता येत नाही.

८) जरी आकडेवारी संचाचे समांतर माध्य सारखेच असले तर सामुग्रीतील पदे सारखीच असतील असे नाही. उदा. ३ + ४ + ५ १२/३ = ६

उपयोग -

१) माध्य हे सर्वात साधे आणि सर्वसामान्यपणे सर्व व्यवहारात वापरले जाते.

२) एकाच प्रकारच्या उत्पादनाची नगाच्या विक्री किंमत ठरविण्यासाठी उपयोग होतो.

३) सरासरी उत्पादन काढून पुढील वर्षीच्या उत्पादनाचा अंदाज काढण्यासाठी उपयोग होतो. त्याचबरोबर भूगोलात हवामान अंदाजाची सरासरी काढून (पर्जन्य, तापमान) पुढील अंदाज बांधण्यासाठी उपयोग केला जातो.

४) सामाजिक आणि आर्थिक अभ्यासाच्या अनेक बाबतीत समांतर माध्याच्या उपयोग केला जातो. उद्योग व्यवसाय व व्यापारामध्ये त्याचा उपयोग सर्रास होतो. सर्वसामान्य व्यक्तीसुद्धा समांतर माध्याचा उपयोग करीत असतात. सरासरी नफा-किंमत अशा प्रकारच्या गोष्टी माध्याद्वारे स्पष्ट केले जातात.

१.६ मध्यगा / मध्यमा

भौगोलिक वितरणातील निरीक्षण अंकाचे दोन समान विभाग करणाऱ्या संख्येस मध्यगा असे म्हणतात किंवा भौगोलिक घटकाची मांडणी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने केली असता बरोबर मध्यभागी येणाऱ्या किंमतीस मध्यगा असे म्हणतात. उदा. पुणे शहराजवळून वाहणाऱ्या मुठा नदीच्या पात्राचा विचार केल्यास सर्वसाधारणत: नदीच्या वार्षिक पाण्याच्या पातळीवर १९६१ साली पानशेत फुटून जी दुर्घटना घडली त्यावेळच्या मूल्याचा अंतर्भाव या वितरणात केला तर सरासरी पाण्याची पातळी ही नेहमी असणाऱ्या पातळीपेक्षा कितीतरी अधिक असते व एकूण वितरणाच्या केंद्रीय प्रवृत्ती ही सरासरी यथा योग्य करु शकणार नाही. अशा स्थितीत सरासरी अथवा मध्यगा परिमाणाचा उपयोग केला जातो.

दिलेली भौगोलिक आकडेवारी उतरत्या श्रेणीने किंवा चढत्या श्रेणीने घेवून पुन्हा त्यांची मांडणी केली जाते व त्याच्यावरुन त्या पद मालेतील मध्यगा काढण्यात येते. मध्यगाद्वारे पदमालीकेतील संख्या दोन भागात विभागल्या जातात. संपूर्णपणे भौगोलिक आकडेवारीचे दोन भाग झाल्यानंतर एका भागात मध्यगापेक्षा सर्व आकडे कमी मूल्याचे व दुसऱ्या भागात जास्त मूल्याचे असतात. मध्यगा काढण्यासाठी सर्वसाधारणपणे खालील सूत्राचा वापर होतो.

सूत्र व गणित

मध्यगा गुण / फायदे -

१) सोपेपणा - याची निश्चित व्याख्या दिलेली असल्याने समजण्यास सुलभ व सोपे होते.

२) संगणनेस सोपे - ज्याप्रमाणे मध्यगा समजण्यास सोपे असते त्याप्रमाणे काढण्यासाठी ते सोपे आहे. सर्वसाधारण व्यक्तीला सुद्धा त्याचा उपयोग करता येतो.

३) शेवटच्या किंमतीचा / संख्येचा अवास्तव प्रभाव नाही - टोकाच्या संख्येत बदल झाला तरी मध्यकेवर त्याचा काही परिणाम होत नाही. म्हणजेच अंत किंमतीचा प्रभाव किंवा दोन्हीकडच्या आकड्याच्या परिणामापासून मध्यगा ६० त्याचप्रमाणे ४०, ५०, ६०, ७०, १५०० असले तरी मध्यगा ६० टोकाच्या संख्येचा फरक पडत नाही.

४) मुक्त अंतवर्ग - शेवटच्या वर्गाची कालमर्यादा दिली नसली तरी मध्यगा काढता येते.

५) गुणात्मक सामुग्रीतही दाखविता येते - सामुग्री जेव्हा गुणात्मक असते तेव्हा त्याला संख्यात्मक स्वरुप येत नाही. अशा गुणात्मक साधन सामुग्रीची सरासरी काढता येत नाही. परंतु मध्यगा काढता येते. उदा. प्रामाणिकपणा, बुद्धीमत्ता, सौंदर्य या गोष्टी अंकाच्या रुपाने मोजणे कठीण असते तयंचा क्रम लावून मध्यगा निश्चित करता येते.

६) आलेखाने ठरविता येते -आलेख कागदावर आलेखाचा उपयोग करुन मध्यगा काढता येते. त्याच्यासाठी संचीत वारंवारिता आलेख (ogive) हा आलेख काढून मध्यगा काढता येते.

७) आकडेवारीतही आढळते - विविध प्रकारची साधनसामुग्री उपलब्ध केल्यास त्या आकडेवारीतही मध्यगा काढता येतात.

दोष / मर्यादा / तोटे -

१) घटक कमी असतील व त्याच्या मूल्यांत फार फरक असेल तर मध्यगा योग्य प्रतिनिधीत्व करीत नाहीत. जेव्हा आकडे कमी जास्त प्रकारचे असतात तेव्हा मध्यगा निरुपयोगी ठरते. उदा. १०, १२, १४, १६, ६०, २००, ६०० जर घटकांच्या किंमती अशा असतील तर त्याचे मध्यगा मूल्य १६ येते. पण हा आकडा सर्व साधनसामुग्रीचे योग्य प्रतिनिधीत्व करीत नाही.

२) बीजगणितात त्याचा जशाचा तसा वापर होत नाही.

३) घटकातील पदाची संख्या वाढल्यास मध्यगा बदलते म्हणजे स्थिर मूल्य नसते.

४) सर्व मूल्यावर प्रत्यक्षपणे आधारीत नसते. मध्यगा काढतना दिलेल्या आकडेवारीतील सर्व किंमतीचा प्रत्यक्ष उपयोग करावा लागत नाही. म्हणून ती सर्व किंमतीवर आधारीत नसते.

उपयोग -

मध्यगा समजण्यास सोपी असल्याने त्याचा प्रत्यक्ष वापर मोठ्या प्रमाणावर होतो. वैयक्तिक आकड्याचे मोजमापन कठीण असून त्याची तुलना करावयाची झाल्यास मध्यमाचा उपयोग केला जातो. त्यामुळे काही सामाजिक बाबतीत पगार संपत्ती वाटप त्या गुणवैशिष्टयाबाबत त्यांचा उपयोग मोठ्या प्रमाणावर होतो. परंतु आर्थिक व व्यापारी उलाढालीत त्याचा उपयोग होत नाही. मध्यगा आकडेवारीचे दोन भाग पडतात. निम्मे घटक मध्यगा मूल्यापेक्षा मोठे असतात. निम्म घटक मध्यमा मूल्यापेक्षा लहान असतात. म्हणजेच मध्यवर्ती ठिकाण निश्चित करण्यासाठी मध्यगाचा उपयोग होतो.

आलेखाचा मध्यगा

१.७ बहुलक

भौगोलिक आकडेवारीतील ज्या घटकांची वारंवारिता सर्वात अधिक असते. त्या किंमतीस बहुलक असे म्हणतात. म्हणजेच ज्या किंमती भोवती जास्तीत जास्त निरीक्षण मूल्ये एकत्रित येतात ती किंमत म्हणजे वहुलक होय. भौगोलिक घटकाच्या वितरणात बहुलकाचा उपयोग बऱ्याचवेळा केला जातो. कित्येक वितरणामध्ये एकापेक्षा जास्त बहुलक असू शकतात. त्यास मुख्य बहुलक व उपबहुलक असे म्हणतात. वितरणात एखाद्या वर्गात वारंवारीता जास्तीत जास्त असते. पण त्याशिवाय इतर वर्गात वारंवारिता कमी होऊन पुन्हा एखाद्या वर्गामध्ये वाढू शकते. अशा वितरणात एकापेक्षा जास्त बहुलक असतात. उदा. नदीने वाहून आणलेल्या गाळाचे आकारमान त्याच्या व्यासावरुन ठरवितात. मुख्य नदी व उपनदी यांच्या संगमानंतरच्या भागातून आपण एखादा नमुना घेऊन आकारमानाचे वितरण मांडले तर त्यात बराचसा भाग हा कमी आकारमान असलेला आहे असे दिसून येते. उपनदीबरोबर आलेला गाळ हा साहजिकच मोठ्या आकारमानाचा असतो. म्हणूनच वारंवारिता पुढच्या वर्गात वाढलेली दिसते. अशा वितरणास द्विशिखरी वितरण किंवा दोनपेक्षा जास्त ठिकाणी वारंवारिता एकत्रित होत असेल तर बहुशिखरी वितरण असे म्हणतात.

उदा. खालील १० विद्यार्थ्यांचे मार्क दिलेले आहेत त्याच्यावरुन बहुलक काढा.

विद्यार्थी क्रमांक	मार्क्स
१	१०
२	२१
३	२४
४	३१
५	३१
६	२७
७	३१
८	२०
९	३५
१०	२५

१० = १
२० = १
२१ = १
२४ = १
२५ = १
२७ = १
३१ = ३
३५ = १

बहुलक = ३१ (कारण ३१ ही संख्या जास्त वेळा (३) आली आहे.)

बहुलकाची किंमत ठरविण्यासाठी प्रथम कोणत्या वर्गात जास्तीत जास्त वारंवारिता आहे ते ठरवावे लागते त्यावरुन सूत्राचा उपयोग करुन बहुलक काढला जातो.

$$L+\frac{f1-f0}{2f1-f0-f2}\times i$$

Where

L= जास्तीत जास्त वारंवारिता असलेल्या वर्गाची लघुसीमा किंवा भुमिष्णीत लघुसीमा.

f1 त्या वर्गाची वारंवारिता किंवा जास्तीत जास्त वारंवारिता

f0 जास्तीत जास्त वारंवारिता वर्गाआधीच्या वर्गातील वारंवारिता

f2 जास्तीत जास्त वारंवारिता असलेल्या वर्गानंतरच्या वर्गातील वारंवारिता

i वर्गविस्तार / वर्गांतर

टिप - (जास्तीत जास्त वारंवारिता असलेला वर्ग निवडून घ्यावा)

उदा.

गुण	विद्यार्थी
१० - २०	५
२० - ३०	९
३० - ४०	१३
४० - ५०	२१
५० - ६०	२०
६० - ७०	१५
७० - ८०	८
८० - ९०	३

$$L + \frac{f1 - f0 \times i}{2f1 - f0 - f2}$$

$$= 40 + \frac{21 - 13x10}{2(21) - 13 - 20}$$

$$= 40 + \frac{8x10}{42 - 33}$$

$$= 40 + \frac{8x10}{9}$$

$$= 40 + \frac{80}{9}$$

$$= 40 + 8.8$$

$= 48.8$ (बहुलक)

उदा. खालील कुटुंबातील उत्पन्न दिलेले आहे. त्यावरुन बहुलक (mode) काढा.

कुटुंब	उत्पन्न गट
१२	० - १००
१८	१०० - २००
२७	२०० - ३०
२०	३०० - ४००
१७	४०० - ५००
६	५०० - ६००

$$L+\frac{f1-f0\times i}{2f1-f0-f2}$$

$$=200+\frac{27-18x10}{2(27)-18-20}$$

$$=200+\frac{9x10}{54-38}$$

$$=200+\frac{9x10}{16}$$

$$=200+56.25$$

$$=256.25\text{ mode}$$ (बहुलक)

आलेखात्मक बहुलक -

जर संख्यात्मक साधन सामुग्री श्रेणी व वारंवारिता दिलेली असेल तर त्या आकडेवारीवरुन आलेखात्मक बदल काढता येतो. प्रथमत: आडव्या आसावर वर्गमर्यादा घेऊन प्रमाणानुसार वारंवारिता दाखववी लागते व नंतर प्रत्येक वर्गमर्यादेमध्ये किती वारंवारिता आहे हे स्तंभालेखाच्या सहाय्याने दाखवले जाते व नंतर जो सर्वात उंच स्तंभ असतो त्याच्या वरच्या बाजूतील दोन्ही कोपरे व उंच स्तंभातील कोपरे एकमेकांना जोडून जो बिंदू तयार होतो त्या बिंदूवर लंब टाकल्यास जे मूल्य तयार होते तोच त्या आकडेवारीतील बहुलक (mode) असतो.

उदा. पुढील दिलेल्या आकडेवारीवरुन आलेखात्मक बहुलक (mode) काढा.

वर्ग	वारंवारिता
० - १०	५
१० - २०	११
२० - ३०	१९
३० - ४०	२१
४० - ५०	१६
५० - ६०	१०
६० - ७०	८
७० - ८०	६
८० - ९०	३
९० - १००	१

$$L+\frac{f1-f0\times i}{2f1-f0-f2}$$

$$=30+\frac{21-19x10}{2(21)-19-16}$$

$$=30+\frac{2x10}{42-35}$$

$$=30+\frac{2x10}{7}$$

$$=30+2.8$$

$=32.8$ mode (बहुलक)

आलेख

बहुलकाचे गुण / दोष / उपयोग -

गुण / फायदे -

१) व्याख्या निश्चित असल्याने समजण्यास सोपे जाते.

२) काढण्याची पद्धत एकदम सोपी आहे.

३) दोन्ही टोकाकडील किंमतींचा बहुलकावर परिणाम होत नाही.

४) वर्गातील कमाल व किमान मर्यादा (शेवटच्या व सुरुवातीच्या) दिली नाही तरी बहुलक काढता येतो.

दोष / मर्यादा / तोटे -

१) जर दिलेल्या आकडेवारीतील एकापेक्षा अधिक बहुलके असतील किंवा अनेक किंमतीच्या वारंवारिता जवळपास समान असतील तर बहुलक ठरविणे कठिण असते. जरी ठरविले तरी योग्य प्रतिनिधीत्व करीत नाही.

२) बहुलकाची किंमत काढतना सर्व घटकांच्या किंमतीचा प्रत्यक्ष उपयोग करता येत नाही. म्हणून ते सर्व किंमतीवर आधारीत नसते.

❖❖❖❖

२

विचलनाची परिमाणे

घटक संरचना :

२.० उद्दिष्टये

२.१ प्रस्तावना

२.२ विस्तार / कक्षा

२.३ चतुर्थक विचलन

२.४ सरासरी विचलन

२.५ प्रमाण विचलन

२.६ सरकती सरासरी

२.७ क्षेत्रीय मध्य

२.० उद्दिष्टये

- विचलनाच्या विविध परिमाणांचा अभ्यास करणे.
- सरकती सरासरी अभ्यासणे.
- 'क्षेत्रीय मध्य' तंत्र समजून घेणे.

२.१ प्रस्तावना

विचलनाचे मोजमापन Measळres of Dispersion / Variation

विस्कलन / विखुरलेपण / अपकिरण / अपस्करण

सांख्यिकिय भूगोलामध्ये प्रथमत: भौगोलिक आकडेवारीची साधनसामुग्री जमा करावी लागते. साधनसामुग्री जमा केल्यावर त्याच्यातून माध्य काढले जाते. परंतु केंद्रीय प्रवृत्तीच्या परिमाणाद्वारे वितरणाचे सर्वच गुणधर्म लक्षात येतीलच असे नाही. कारण चलाचे मूल्यांक (घटकातील संख्या) विस्तार कक्षेत कमी अधिक अंतरावर विखुरलेले असतात किंवा निरीक्षण मूल्यांक एखाद्या संख्येभोवती एकत्रित येतात म्हणूनच यासाठी विखुरलेपण मापनाची आवश्यकता भासते.

“एखाद्या पदावलीतील पदे मध्यापासून किती विखुरलेली आहे याचे प्रमाण म्हणजेच अपकिरण किंवा विखुरलेपण होय.”

माध्य किंवा प्रातिनिधीक संख्या खरोखरच वितरणातील सर्व घटकाचे प्रतिनिधीत्व करते किंवा नाही हे तपासल्यानंतरच त्या प्रातिनिधीक संख्येच्या आधारेच निर्णय घेणे आवश्यक ठरते. जर असा निर्णय घेतला नाही तर घेतले जाणारे निर्णय संपूर्ण चुकीचे ठरण्याची शक्यता असते. माध्य प्रतिनिधीत्व करते किंवा नाही हे विखुरलेपणावरुन ठरवितात. म्हणजेच दिलेल्या साधनसामुग्रीत विखरलेपण जास्त असेल तर माध्य कमी प्रतिनिधीत्व करते. याच्या उलट साधनसामुग्रीतील विखुरलेपण जर कमी असेल तर माध्य जास्त प्रतिनिधीत्व करते व अचूक निर्णय घेतले जातात. म्हणून माध्यापासून विचलनाचे मोजमापन करुनच कोणतेही निष्कर्ष काढले जातात.

विखुरलेपण (अपकिरण) मापनाच्या पद्धती किंवा अपस्करणाची परिमाणे -

a) विस्तार Range

b) चतुर्थक विचलन Quaratile deriation

c) सरासरी विचलन / माध्य विचलन mean deriation

d) प्रमाण विचलन

e) सरकती / धावती सरासरी

२.२ विस्तार / कक्षा

विखुरलेपण मापनातील ही अत्यंत साधी व सर्वात सोपी अशी पद्धत आहे. तिचा वापर सर्वसामान्य लोकांना सुद्धा करता येतो. निरीक्षणातील जास्तीत जास्त (मोठी संख्या) व कमीत कमी (लहान संख्या) मूल्यातील फरकास विस्तार किंवा विस्तारकक्षा असे म्हणतात. म्हणजेच साधनसामुग्रीतील सर्वात मोठी संख्या व सर्वात लहान संख्या यांच्यातील फरक हाच विस्तार असतो. विखुरलेपण दाखवत असताना विस्तार पद्धतीमध्ये फक्त दोन्ही टोकांच्या संख्येचाच विचार केला जातो. इतर संख्येला महत्त्व दिले जात नाही. वितरणातील जास्त व कमी मूल्याला महत्त्व दिले जाते.

मोठी संख्या – विस्तार – लहान संख्या

सूत्र	L - S	L = Largest item	मोठी संख्या
		L = Smallest item	लहान संख्या

विस्तार मापनाची पद्धत काढत असताना विस्तार गुणक ही काढला जातो. त्याला विस्तार गुणक असे म्हणतात. हा विस्तार गुणक काढण्यासाठी खालील सूत्राचा उपयोग केला जातो.

Coefficient of Range विस्तार गुणक $= \frac{L - S}{L + S}$

उदा. सिंधुदुर्ग जिल्ह्यामध्ये जुलै महिन्यातील एका आठवड्यात पडलेल्या पावसाच्या नोंदीवरुन विस्तार व विस्तारगुणक काढा.

दिवस	**पर्जन्य मिमि**
सोमवार	२०
मंगळवार	२१
बुधवार	२०
गुरुवार	१६
शुक्रवार	२२
शनिवार	२५
रविवार	१७

$L-S$

$L=25\ S=16$

$25-16=9$

विस्तार = 9

विस्तार गुणक $=\dfrac{L-S}{L+S}$

$=\dfrac{25-16}{25+16}$

$=\dfrac{9}{41}$

$=0.219$

विस्तार गुणक $=0.219$

उदा. एका विद्यार्थ्यांचे विविध विषयातील गुण दिले आहेत. त्याच्यावरुन गुणाचा विस्तार व विस्तार गुणक काढा.

२०   ६५   ५४   ७१   ४४   ३१   ८१   ६२   २४   ८३   ६३

वरील वितरणातील सर्वात मोठी संख्या (Large) L

वरील वितरणातील सर्वात लहान संख्या (Small) S

विस्तार सूत्र $=L-S$

विस्तार $=63$

$$\text{विस्तार गुणक} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{83-20}{83+20}$$

$$= \frac{63}{103}$$

$$= 0.61$$

$$\text{विस्तार गुणक} = 0.61$$

उदा. ३)

विक्री	दुकाने	वर्गमध्य
२० - ३०	५	२५
३० - ४०	२०	३५
४० - ५०	४५	४५
५० - ६०	३५	५५
६० - ७०	२७	६५

टिप : सलग श्रेणीत विस्तार काढताना वारंवारता लक्षात घेतली जात नाही. तर वर्गमध्याचा विस्तार करावा लागतो.

$$\text{विस्तार सूत्र} = L-S$$

$$65-25=40$$

$$\text{विस्तार} = 40$$

$$\text{विस्तार गुणक} = \frac{L-S}{L+S}$$

$$= \frac{65-25}{65+25}$$

$$= \frac{40}{90}$$

$$= 0.44$$

$$\text{विस्तार गुणक} = 0.44$$

विस्तार पद्धतीचे गुण / फायदे -

अ) ही पद्धत समजण्यास अतिशय सोपी आहे.

ब) काढण्यासाठी अतिशय सोपी आहे.

क) ही पद्धत काढण्यासाठी वेळ खूपच कमी लागतो.

दोष / मर्यादा / तोटे

अ) वितरणातील सर्व अंकावर आधारीत नाही फक्त कमी व जास्त या दोन अंकाचाच विचार केला जातो.

ब) टोकाच्या अंकात बदल झाल्यास त्याचा विस्तारावर मोठा परिणाम होतो.

२.३ चतुर्तवद्ध विचलन (QUARTILE DEVIATION)

विस्तार मापन पद्धतीत विखुरलेल्या दाखवत असताना त्याच्यावर काही मर्यादा पडलेल्या दिसून येतात. कारण यात दोन टोकांच्या संख्येचाच विचार केला जातो. म्हणून त्याचा परिणाम विस्तारावर होत असतो. चतुर्थक विचलनामध्ये हा दोष नाहीसा केला जातो. ते दोन्हीही अंक विचारात घेतले जात नाहीत. या पद्धतीत या चार भागापैकी पहिल्या भागाचा व शेवटच्या भागाचा विचार न करता मधल्या दोन भागाचा विचार केला जातो. म्हणजेच पहिले २५% घटक व शेवटचे २५% घटक दूर करुन फक्त मधल्या ५०% घटकाचा विस्तार काढला जातो व त्यास दोन ने भागतात म्हणजेच तिसरे चतुर्थक व पहिले चतुर्थक याला दोनने भागल्यानंतर जे मापन तयार होते त्याला चतुर्थ विचलन असे म्हणतात.

साधनसामग्रतील दोन्ही टोकाकडून १/४ पर्यंत असलेल्या मूल्यांच्या फरकास चतुर्थक विचलन असे म्हणतात. पहिले २५% घटक व शेवटचे २५% घटक दूर करुन मधल्या ५०% घटकाचा विस्तार काढतात व त्याला २ ने भागतात. त्यालाच चतुर्थक विचलन असे म्हणतात.

चतुर्थक विचलन काढत असतात. प्रथमत: सर्व घटकांची मांडणी चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने करावी लागते व त्या मांडणीची चार समान करावे लागतात. पहिला चौथाई भाग म्हणजे पहिला चतुर्थक, दुसरा चौथाई भाग म्हणजे दुसरा चतुर्थक व तिसरा चौथाई भाग म्हणजे तिसरा चतुर्थक त्याला अनुक्रमे अशी नावे दिलेली आहे.

चतुर्थक विचलन काढण्यासाठी खालील सूत्राचा वापर केला जातो.

$Q1 =$ पहिले चतुर्थक

$Q1 = \frac{N+1}{4}$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q2 =$ मध्यगा Median दुसरे चतुर्थक

$Q3 =$ तिसरे चतुर्थक

$Q3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ क्रमाकांच्या घटकांची किंमत

चतुर्थक विचलन $QD = \frac{Q3 - Q1}{2}$

चतुर्थक विचलन $= \dfrac{Q3-Q1}{Q3+Q1}$

१) खाली दिलेल्या आकडेवारीत ९ वर्षात झालेल्या भूकंपाची संख्या दिलेली आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन काढा व स्पष्टीकरण करा.

२, ५, ८, ३,११, ६, १, ५, ९, १४

वाढत्या क्रमाने - १, २, ३, ४, ५, ५, ६, ८, ९, ११, १४

$Q1 = \left(\dfrac{N+1}{4}\right)$ क्रमाकांच्या घटकांची किंमत $N = 11$

$Q1 = \dfrac{11+1}{4}$ क्रमाकांच्या घटकाची किंमत

$Q1 = \dfrac{12}{4}$ क्रमांकाच्या घटकाची किंमत

$Q1 = 3$ क्रमांकाच्या घटकाची किंमत

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये ३ चा क्रमांकाची संख्या ही ३ आहे.

$Q1 = 3$

२) $Q3 = 3\left(\dfrac{N+1}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत $N = 11$

$Q3 = 3\left(\dfrac{11+1}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 3\left(\dfrac{12}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 3(3)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 9$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये ९ चा क्रमांकाची संख्या ही ९ आहे.

$Q3 = 9$

$$QD = \left(\frac{Q3 - Q1}{2}\right)$$

$$QD = \frac{9-3}{2}$$

$$QD = \frac{6}{2}$$

$$QD = 3$$

चतुर्थक विचलन ३ भूकंप

$$Co-efficient\ of\ QD = \frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1}$$

$$QD = \frac{9-3}{9+3}$$

$$QD = \frac{6}{12}$$

$$QD = \frac{1}{2}$$

$$QD = 0.5$$

चतुर्थक विचलन गुणक $= 0.5$ भूकंप

स्पष्टीकरण :

९ वर्षातील झालेल्या भूकंपाची संख्या दिलेली आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन काढले असता खालील गोष्टी स्पष्ट होतात.

१) २५ टक्के ठिकाणात ९ वर्षात ३ पेक्षा कमी भूकंप झाले.

२) २५ टक्के ठिकाणात ९ वर्षात ९ पेक्षा जास्त भूकंप झाले.

३) ५० टक्के ठिकाणातील भूकंपाचे प्रमाण ३ ते ९ च्या दरम्यान असून त्याचे चतुर्थक विचलन ३ इतके असून चतुर्थक विचलन गुणक हा ०.५ इतका झालेला आहे.

४) म्हणजेच सर्व ठिकाणी ९ वर्षात सारख्या प्रमाणात भूकंप झालेले दिसत नाही.

२) खाली निवडक ठिकाणाचे वार्षिक सरासरी पर्जन्यमान दिलेले आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन गुणक काढा व आलेल्या उत्तराचा अन्वयार्थ लिहा.

०.८५, १.५०, १.१०, २.७५, ०.५०, २.७५, ४.२०, २.१८, २.१२, ०.२०, ५.१२

चढत्या क्रमाने - ०.२०, ०.५०, ०.८५, १.१०, १.५०, २.१२, २.७५, २.१८, २.७५, ४.२०, ५.१२

$Q1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ क्रमाकांच्या घटकांची किंमत $N = 11$

$Q1 = \frac{11+1}{4}$ क्रमाकांच्या घटकाची किंमत

$Q1 = \frac{12}{4}$ क्रमांकाच्या घटकाची किंमत

$Q1 = 3$ क्रमांकाच्या घटकाची किंमत

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये ३ चा क्रमांकाची संख्या ही ०.८५ आहे.

$Q1 = 0.85$

२) $Q3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत $N = 11$

$Q3 = 3\left(\frac{11+1}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 3\left(\frac{12}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 3(3)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 9$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये ९ चा क्रमांकाची संख्या ही २.७५ आहे.

$Q3 = 3.75$

$$QD = \frac{Q3 - Q1}{2}$$
$$QD = \frac{3.75 - 0.85}{2}$$
$$QD = \frac{2.9}{2}$$
$$QD = 1.45$$

चतुर्थक विचलन $= 1.45\,cm$ पर्जन्य

$$Co-efficient\ of\ QD = \frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1}$$

$$QD = \frac{3.75 - 0.85}{3.75 + 0.85}$$

$$QD = \frac{2.9}{4.6}$$

$$QD = 0.63$$

चतुर्थक विचलन गुणक $= 0.63\ cm$ पर्जन्य

स्पष्टीकरण :

निवडक ठिकाणांचे वार्षिक सरासरी पर्जन्यमान म्स् मध्ये दिलेले cm. त्यावरुन चतुर्थक विचलन काढले असता खालील गोष्टी स्पष्ट होतात.

१) २५ टक्के ठिकाणात वार्षिक सरासरी पर्जन्य ०.८५ cm पेक्षा कमी झालेले आहे.

२) २५ टक्के ठिकाणात वार्षिक सरासरी पर्जन्य २.७५ cm पेक्षा जास्त झालेले आहे.

३) ५० टक्के ठिकाणातील वार्षिक सरासरी पर्जन्य ०.८५ cm ते २.७५ cm च्या दरम्यान असून चतुर्थक विचलन १.४५ आहे तर चतुर्थक विचलन गुणक ०.६३ आहे.

४) म्हणजेच सर्व ठिकाणी वार्षिक सरासरी पर्जन्य सारखे नाही.

५) पर्जन्यावर परिणाम करणारे घटक -

१) भौगोलिक स्थान

२) हवामान

३) वनस्पती

४) प्राकृतिक रचना

१) सावंतवाडी तालुक्यातील वार्षिक सरासरी उत्पादन हेक्टर मध्ये दिलेले आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन गुणक काढा. आलेल्या उत्तराचा अन्वयार्थ पहा.

२) खाली निवडक ठिकाणाचे वार्षिक सरासरी पर्जन्यमान दिलेले आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन गुणक काढा व आलेल्या उत्तराचा अन्वयार्थ लिहा.

२.५, ८, ४, ७, २, ३, २, १, ०.५

चढत्या क्रमाने - ०.५, १, २.५, २.२, ४, २.२, ८

$Q1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ क्रमाकांच्या घटकांची किंमत

$Q1 = \frac{7+1}{4}$ क्रमाकांच्या घटकाची किंमत

$Q1 = \frac{8}{4}$ क्रमांकाच्या घटकाची किंमत

$Q1 = 2$ क्रमांकाच्या घटकाची किंमत

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये ३ चा क्रमांकाची संख्या ही १ आहे.

$Q1 = 1$

२) $Q3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत $N = 11$

$Q3 = 3\left(\frac{7+1}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 3\left(\frac{8}{4}\right)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 3(2)$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

$Q3 = 6$ क्रमांकाच्या घटकांची किंमत

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये ९ चा क्रमांकाची संख्या ही २.२ आहे.

$Q3 = 6$

$QD = \left(\frac{Q3 - Q1}{2}\right)$

$QD = \frac{7.2 - 1}{2}$

$QD = \frac{6.2}{2}$

$QD = 3.1$

चतुर्थक विचलन $= 3.1$ हेक्टर उत्पादन

$Co - efficient\ of\ QD = \frac{Q3 - Q1}{Q3 + Q1}$

$QD = \frac{7.2 - 1}{7.2 + 1}$

$QD = \frac{6.2}{8.2}$

$QD = 0.75$

चतुर्थक विचलन गुणक $= 0.75$ हेक्टर उत्पादन

स्पष्टीकरण :

वरील आकडेवारीमध्ये सावंतवाडी तालुक्यातील वार्षिक सरासरी उत्पादन हेक्टरमध्ये दिलेले आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन काढले असता खालील गोष्टी स्पष्ट होतात.

१) २५ टक्के सावंतवाडी तालुक्यातील वार्षिक सरासरी उत्पादन १ हेक्टर पेक्षा कमी झालेले आहे.

२) २५ टक्के सावंतवाडी तालुक्यात वार्षिक सरासरी उत्पादन २.२ हेक्टर पेक्षा जास्त झालेले आहे.

३) ५० टक्के सावंतवाडी तालुक्यात वार्षिक सरासरी उत्पादन १ हेक्टर ते २.२ हेक्टरच्या दरम्यान असून चतुर्थक २.१ आहे, तर चतुर्थक विचलन गुणक ०.७५ इतके आहे.

४) उत्पादनावर परिणाम करणारे घटक.

जमिनीचे स्वरुप

पाणीपुरवठा

तंत्रज्ञानाचा अभाव

जमिनीचे तुकडीकरण

आर्थिक परिस्थिती

$$Q1 = L + \left(\frac{\frac{N+1}{4} - cf}{f} \right) \times i$$

$$Q1 = L + \left(\frac{3\left(\frac{N+1}{4} \right) - cf}{f} \right) \times i$$

$$Q1 = L + \left(\frac{3\left(\frac{N+1}{4} \right) - cf}{f} \right) \times i$$

१) खालील आकडेवारीमध्ये भारतातील शहरामधील १९९१ मधील स्त्रियांचे वय वैवाहिक स्थितीनुसार दिलेले आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन काढा व आलेल्या उत्तराचा अन्वयार्थ लिहा.

वयोगट (x)	विवाहित व्यक्ती टक्केवारीमध्ये (f)	पेक्षा कमी संचित वारंवारिता ते less than cf
१० - ४०	५	५
१५ - १९	४१	४६
२० - २४	८६	१३२
२५ - २९	९५	२२७
३० - ३४	९६	३२३
३५ - ३९	९५	४१८
४० - ४४	९१	५०९
४५ - ४९	८८	५९७
	५९७	

$$Q1 = L + \left(\frac{\frac{N+1}{4} - cf}{f} \right) \times i \quad N = 597$$

$$Q1 = \left(\frac{N+1}{4} \right)$$

$$Q1 = \frac{597+1}{4}$$

$$Q1 = \frac{598}{4}$$

$$Q1 = 149.5$$

१४९.५ ही संख्या २२७ या संचित वारंवारितेमध्ये येते. तीची वारंवारिता ९५ असून मूल्य २५-२९ एवढे आहे.

$$Q1 = L + \left(\frac{\frac{N+1}{4} - cf}{f} \right) \times i \quad N = 597$$

$$Q1 = 25 + \left(\frac{\left(\frac{597+1}{4} \right) - 132}{95} \right) \times 4$$

$$Q1 = 25 + \left(\frac{\left(\frac{598}{4} \right) - 132}{95} \right) \times 4$$

$$Q1 = 25 + \left(\frac{149.5 - 132}{95}\right) \times 4$$

$$Q1 = 25 + \left(\frac{17.5}{95}\right) \times 4$$

$$Q1 = 25 + (0.9 \times 4)$$

$$Q1 = 25 + 0.76$$

$$Q1 = 25.76 \text{ वर्ष}$$

४४८.५ ही संख्या ५०९ या संचित वारंवारितेमध्ये येते तीची वारंवारिता ९१ असून मूल्य ४०-४४ एवढे आहे.

$$Q3 = L + \left(\frac{3\left(\frac{N+1}{4}\right) - cf}{f}\right) \times i \quad N = 597$$

$$Q3 = 40 + \left(\frac{3\left(\frac{597+1}{4}\right) - 132}{91}\right) \times 4$$

$$Q3 = 40 + \left(\frac{3\left(\frac{598}{4}\right) - 132}{91}\right) \times 4$$

$$Q3 = 40 + \left(\frac{3(149.5) - 418}{91}\right) \times 4$$

$$Q3 = 40 + \left(\frac{448.5 - 418}{91}\right) \times 4$$

$$Q3 = 40 + \left(\frac{30.5}{91}\right) \times 4$$

$$Q3 = 40 + (0.33 \times 4)$$

$$Q3 = 40 + 1.32$$

$$Q3 = 41.32 \text{ वर्ष}$$

$$QD = \frac{Q3 - Q1}{2}$$

$$QD = \frac{41.32 - 25.76}{2}$$

$$QD = \frac{15.56}{2}$$

$$QD = 7.78$$

चतुर्थक विचलन $= 7.78$ वर्षे

स्पष्टीकरण :

वरील आकडेवारीमध्ये भारतातील शहरामधील १९९१ मधील स्त्रियांचे विवाहित स्त्रियांचे वय वैवाहिक स्थितीनुसार दिलेले आहे. त्यावरुन चतुर्थक विचलन काढले असता खालील गोष्टी स्पष्ट होतात.

१) २५ टक्के विवाहीत स्त्रियांचे वय २५.७६ वर्षे पेक्षा कमी आहे.

२) २५ टक्के विवाहीत स्त्रियांचे वय ४१.३२ वर्षे पेक्षा जास्त आहे.

३) ५० टक्के विवाहीत स्त्रियांचे वय २५.७६ वर्षे ते ४१.३२ वर्षे याच्या दरम्यानच्या वयोगटातील असून चतुर्थक विचलन २.७८ वर्षे आहे.

४) १९९१ मधील विवाहीत स्त्रियांचे वय सारखे आढळत नाही.

५) विवाहीत स्त्रियांच्या वयोगटावर परिणाम करणारे घटक

१) स्त्रियांकडे पाहण्याचा दृष्टीकोन

२) आर्थिक परिस्थिती

३) लोकांची मनोवृत्ती

४) व्यवसाय

५) सेवा-सुविधांचे प्रमाण

चतुर्थक विचलनाचे गुण / फायदे

अ) जरी वर्गाची कमाल मर्यादा पूर्ण नसली तरी काढता येते.

ब) या पद्धतीतक सर्व अंकाचा विचार केला जात नसला तरी ५०% भागाचा विचार केल्याने याद्वारे येणारे निष्कर्ष योग्य असतात.

क) विस्तार पद्धतीतील दोष टाळता येतो.

ड) ही पद्धत समजण्यास सोपी व काढण्यास सोपी आहे.

दोष / मर्यादा

अ) चतुर्थक विचलन हे साधनसामुग्रीतील सर्व अंकावर आधारीत नाही फक्त निम्या अंकावरच आधारीत असते.

ब) पुढील गणिताच्या पद्धतीत किंवा गणिताच्या अंकास उपयुक्त ठरत नाही.

क) नमुना बदलल्यास चतुर्थक विचलनही बदलते.

ड) पहिले व शेवटचे २५% अंक वगळून काढले असल्याने सर्व घटकासाठी काढलेले निर्णय योग्य असतीलच असे सांगता येत नाही.

इ) वारंवारिता वितरणात किमान मर्यादा नसेल तर चतुर्थक विचलन काढता येत नाही.

उपयोग

सर्वकष साधनसामुग्रीतील विचलन दाखविण्यासाठी या पद्धतीचा उपयोग होतो जर अंकामधील विचलन कमी असेल व लवकर निर्णय घ्यावयाचा असेल तर ही पद्धत अत्यंत उपयुक्त ठरते.

२.४ सरासरी विचलन / माध्य विचलन (अपकिरणांचा प्रथम घात)

विचलन दाखविण्यासाठी ही पद्धत महत्त्वाची समजली जाते. कारण विस्तारामध्ये दोन टोकांच्या संख्येचा विचार केला जातो. तर चतुर्थक विचलनात फक्त मधल्या ५०% भागाचा विचार केला जातो. म्हणून या दोन्हीही पद्धतीत काढले जाणारे निष्कर्ष सव अकांवर आधारीत नसतात. हा दोष काढण्यासाठी किंवा घालवण्यासाठी सरासरी विचलनाचा उपयोग केला जातो. 'कोणत्याही माध्यापासून' काढलेल्या विचलनाची (- किंवा + चिन्हे लक्षात न घेता) सरासरी म्हणजेच माध्य विचलन होय. माध्य विचलन सर्व अंकावर आधारीत असत. सरासरी विचलन काढताना खालील टप्यातून जावे लागते.

१) प्रथमत: दिलेल्या वितरणाचे मध्यगा किंवा समांतर माध्य काढणे.

२) त्या माध्यापासून प्रत्येक पदाचे विचलन / अंतर काढणे.

३) प्रत्येक पदाचे विचलन काढल्यानंतर - किंवा + चिन्हे लक्षात न घेता विचलनाची बेरीज करणे.

४) त्या विचलनाची सरासरी काढणे म्हणजेच सरासरी विचलन होय. याच्यासाठी पुढील सूत्राचा वापर केला जातो.

मध्य विचलन किंवा सरासरी विचलन -

विस्तार व चतुर्थक विचलन दिलेल्या सर्व किंमतीवर आधारीत नसते. हा दोष सरासरी विचलनात काढून टाकण्यात आला आहे. प्रत्येक घटकाच्या किंमतीच्या सरासरी विचलनात काढून टाकण्यात आला आहे. प्रत्येक घटकाच्या किंमतीच्या सरासरी किंवा गणिती माध्यमापासून विचलीत झालेल्या निरपेक्ष अंतराच्या बेरजेला घटकांच्या संख्येने भागले असता येणाऱ्या संख्येला किंवा बहुलक यापैकी कोणत्याही साधारणमानाचा वापर करतात. म्हणून

सूत्र

$$\text{मध्य विचलन किंवा सरासरी विचलन} = \frac{\text{निरपेक्ष अंतराची बेरीज}}{\text{घटकांची संख्या}}$$

उदा. एका विद्यार्थ्याला मिळालेल्या गुणांचे सरासरी विचलन काढा.

गुण	मध्यमेपासून निरपेक्ष अंतर
२०	४२
२४	३८
३१	३१
४४	१८
५४	८
६२	०
६३	१
६५	३
७१	९
८१	१९
८३	२१
एकूण	१९०

या उदाहरणात सहाव्या घटकाची किंमत ही मध्यमा असेल, त्यामुळे सहावा घटक म्हणजे ६२ असल्याचे प्रत्येक घटकाचे ६२ पासूनचे अंतर काढून ते निरपेक्ष अंतर म्हणावे. म्हणून

$$\text{सरासरी विचलन} = \frac{\text{अंतराची बेरीज}}{\text{घटकांची संख्या}}$$

$$\text{सरासरी विचलन} = \frac{१९०}{११}$$

$$\text{सरासरी विचलन} = १७.३$$

सरासरी विचलनाचे गुण -

अ) समजण्यास ही पद्धत सोपी आहे.

ब) सहजासहजी काढता येते.

क) ही पद्धत साधनसामुग्रीतील सर्व अंकांवर आधारीत आहे.

ड) नमुन्यात बदल झाला तरी फारसा बदल होत नाही.

इ) टोकाच्या अंकात बदल झाला तरी मूल्यावर विशेष परिणाम होत नाही.

दोष / मर्यादा -

अ) पुढील गणिताच्या पद्धतीत जशाच्या तसा वापर करता येत नाही.

ब) जेव्हा साधन सामुग्रीत विचलन फार असते तेव्हा ही पद्धत अचूक मार्गदर्शन करु शकत नाही.

२.५ प्रमाण विचलन

कार्ल पिअरसन १८९३ साली ही संकल्पना स्पष्ट केली. त्याच्या मते प्रमाण विचलनाचा उपयोग विचलन मध्ये फार मोठया प्रमाणात केला जातो. ही पद्धत सर्वात उत्कृष्ट म्हणून संबोधली जाते. सर्वसाधारण विचलन दाखविण्यासाठी या पद्धतीचा वापर फार मोठया प्रमाणात केला जातो. कोणत्याही माध्यापासून (केंद्रीय मूल्य, सरासरी, मध्यमा, बहुलक सामान्यत: समांतर माध्यापासून) काढलेल्या विचलनाच्या वर्गाच्या सरासरीचे वर्गमुळ म्हणजेच प्रमाण विचलन होय. प्रमाण विचलन सर्व अंकावर आधारीत असून त्याच्यापासून काढलेले निष्कर्ष अधिक अचूक असतात. म्हणूनच उत्तम विचलन मापनाचेही साधन म्हणून याचा उपयोग मोठया प्रमाणावर होतो. प्रमाण विचलन काढताना खालील पायर्यातून जावे लागते.

१) समांतर किंवा इतर माध्य काढणे.

२) प्रत्येक पद किंवा काढलेले माध्य यातील विचलन काढणे.

३) विचलनाचा मार्ग काढणे.

४) वर्ग केलेल्या विचलनाची बेरीज करणे.

५) व त्या बेरजेवरुन प्रमाण विचलन काढणे.

एकच घटक असेल तर

प्रमाण विचलन :

व्याख्या :

साधनसामग्रीतील सरासरीपासून काढलेल्या विचलनाच्या वर्गाच्या सरासरीने वर्गमुळ म्हणजे प्रमाण विचलन होय.

विचलन मोजण्यासाठी हे सर्वात महत्त्वाचे परिमाण आहे. व हे साधनसामग्रीतील सर्व मुल्यांवर अवलंबून असावे. त्यामुळे घेतलेले निर्णय हे अचूक असतात. प्रमाण विचलनाला SD असेही म्हणतात किं ग्रीक भाषेत $\sigma\, sigma$ हे चिन्हदेखील यासाठी वापरले जाते. प्रमाण विचलन काढण्यासाठी खाली सूत्राचा वापर केला जातो.

सूत्र

$$SD/6 = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

प्रमाण विचलन सहगुणक $= \dfrac{SD / \text{प्रमाण विचलन}}{mean / \text{सरासरी}} \times 100$

प्रमाण विचलन काढल्यानंतर प्रमाण विचलनाचे मूल्य हे कमी असल्यास विचलनही कमी असते व प्रमाण विचलनाचे मूल्य जास्त असल्यास विचलनही जास्त असते. प्रमाण विचलनाचे मुल्य कमी असल्यास प्रमाण विचलन सहगुणकाची किंमत कमी येते. प्रमाण विचलनाचे मूल्य जास्त असल्यास किंमत कमी येते. प्रमाण विचलन सहगुणकाची किंमत जास्त येते. प्रमाण विचलन हे नेहमी सरासरी पासून काढले जाते.

सरासरी पर्जन्य	ठिकाणे f	वर्गमध्य m	$d(m-x)$	d^2	fxd	fxd^2
० - १०	१८	५	- ३०	९००	- ५४०	१६२००
१० - २०	१६	१५	- २०	४००	- ३२०	६४००
२० - ३०	१५	२५	- १०	१००	- १५०	१५००
३० - ४०	१२	३५	०	०	०	०
४० - ५०	१०	४५	१०	१००	१००	१०००
५० - ६०	०५	५५	२०	४००	१००	२०००
६० - ७०	०३	६५	३०	९००	९०	२७००
७० - ८०	०१	७५	४०	१६००	४०	१६००

$$SD/\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon fd^2}{n} - \frac{(\varepsilon fd)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{31400}{80} - \frac{(-680)^2}{80}}$$

$$= \sqrt{392.5 - (8.5)^2}$$

$$= \sqrt{392.5 - 72.25}$$

$$= \sqrt{320.25}$$

$$SD = 17.89cm$$

$$V = \frac{SD}{X} \times 100$$

$$V = \frac{17.89}{35} \times 100$$

$$V = 0.51 \times 100$$

$$V = 51\%$$

स्पष्टीकरण :

महाराष्ट्रातील ८० ठिकाणातील सरासरी पर्जन्याचे प्रमाण विचलन काढले असता खालील गोष्टी स्पष्ट होतात.

१) दिलेल्या आकडे वरुन आलेले विचलन हे १२.८९ सेमी इतके आहे. तर v ची किंमत ५१ टक्के आलेली आहे. यावरुन सरासरी पर्जन्यामध्ये विचलन जास्त आहे.

२) महाराष्ट्रातील ८० ठिकाणापैकी १७ ते ५३ च्या दरम्यान सरासरी पर्जन्य हे जास्त आढळते.

३) महाराष्ट्रात काही ठिकाणी कमी तर काही ठिकाणी जास्त पर्जन्य आढळते. म्हणजे सरासरी योग्य प्रतिनिधीत्व करत नाही.

४) महाराष्ट्रातील पर्जन्यावर परिणाम करणारे घटक हवामान, भूरचना, भौगोलिक स्थान.

२) खालील आकडेवारीमध्ये समुद्रसपाटीपासून उंचीनुसार वसाहतीचे वितरण दिलेले आहे. त्यावरुन प्रमाण विचलन काढा व आलेल्या उत्तराचा अन्वयार्थ लिहा.

सरासरी पर्जन्य	ठिकाणे f	वर्गमध्य m	$d(m-x)$	d^2	fxd	fxd^2
१०० - २००	३०	१५०	-२००	४००००	-६०००	१२०००००
२०० - ३००	२२	२५०	-१००	१०००००	-२२००	२२००००
३०० - ४००	२०	३५०	०	०	०	०
४०० - ५००	१५	४५०	१००	१००००	१५००	१५००००
५०० - ६००	१०	५५०	२००	४००००	२०००	४०००००
६०० - ७००	०३	६५०	३००	९००००	९००	२७००००

$$SD/\sigma = \sqrt{\frac{\varepsilon fd^2}{n} - \frac{(\varepsilon fd)^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2240000}{100} - \frac{(-3800)^2}{100}}$$

$$= \sqrt{22400 - (-38)^2}$$

$$= \sqrt{22400 - 1444}$$

$$= \sqrt{20956}$$

$$SD = 144.76\,m$$

$$V = \frac{SD}{X} \times 100$$

$$V = \frac{144.76}{350} \times 100$$

$$V = 0.41 \times 100$$

$$V = 41\%$$

स्पष्टीकरण :

समुद्रसपाटीपासून उंचीनुसार वसाहतीच्या वितरणावरुन प्रमाण विचलन काढले असतात खालील गोष्टी स्पष्ट होतात.

१) दिलेल्या आकडे वरुन आलेले विचलन हे १४४.७६ मी इतके आहे. . तर v ची किंमत ४१ टक्के आलेली आहे. यावरुन सरासरी पर्जन्यामध्ये विचलन जास्त आहे.

२) ७०० वसाहतीपैकी २०५ ते ४९५ च्या दरम्यानच्या वसाहतींची समुद्रसपाटीपासूनची उंची जास्त आढळते.

३) ७०० वसाहतीपैकी काही वसाहती समुद्रसपाटीपासून जास्त उंचीवर तर काही वसाहती या कमी उंचीवर आढळतात.

४) महाराष्ट्रातील उंचीवर परिणाम करणारे घटक हवामान, भूरचना, भौगोलिक स्थान.

प्रमाण विचलनाचे गुण / फायदे -

१) ही पद्धत सर्व अंकावर आधारीत आहे.

२) विचलन दाखविण्यासाठी या पद्धतीची निश्चित व्याख्या केलेली असल्याने ती समजण्यास सोपी आहे.

३) संख्या शास्त्रातील पुढील गणिताच्या पद्धतीत प्रमाण विचलनाचा ही वापर करता येतो.

४) विचलन दाखवत असताना या पद्धतीत नमुन्यात झालेल्या बदलाचा या साधनावर विशेष परिणाम होत नाही.

५) ही पद्धत अचूक विश्लेषण किंवा विचलन दर्शविते म्हणून या पद्धतीद्वारे घेतलेले निर्णय अचूक असण्याची शक्यता जास्त असते.

दोष / मर्यादा -

१) जरी या पद्धतीने अचूक निर्णय होत असले तरी तो काढण्यास खूपच किचकट आहे.

२) ही पद्धत काढण्यासाठी किचकट असल्याने सर्वसामान्यास समजण्यास ती खूपच कठीण जाते.

३) या पद्धतीमध्ये टोकाच्या अंकाना जास्तीत जास्त महत्त्व दिलेले असते.

उपयोग -

विचलन दाखविण्यासाठी ही पद्धत अत्यंत उत्कृष्ट असल्याने उत्तम विचलनाचे मापन म्हणून या पद्धतीचा उपयोग जास्तीत जास्त केला जातो. तसेच पुढील बैजिक किंवा संख्याशास्त्रीय गणिताच्या प्रक्रियेमध्ये या पद्धतीचा वापर मोठया प्रमाणावर केला जातो.

उदा. पुढे दिलेल्या साईजवरुन प्रमाण विचलन काढा.

२.६ धावती / सरकती सरासरी

काळ किंवा वेळेच्या संदर्भात मांडलेली निरीक्षणमूल्ये ज्या सांख्यिकीय श्रेणीमध्ये असतात. त्या श्रेणीला कालसंदर्भित श्रेणी असे म्हणतात. कालसंदर्भ श्रेणीमध्ये असलेली मूल्ये तयात सातत्याने होणारी वाढ किंवा घट दर्शवितात. तसेच मोठया काळात होणारे बदल व चक्रीय बदल हे सुद्धा स्पष्टपणे दिसून येतात. धावती सरासरीच्या सहाय्याने कालसंदर्भित श्रेणीचे मापन करता येते.

या पद्धतीमध्ये धावत्या सरासरीच्या मालिकेतील विशिष्ट क्रम मोजला जातो. दिलेल्या काळातील विशिष्ट संख्येची सरासरी ही वार्षिक माहिती किंवा काळमर्यादा मोजली जाते. आणि ती कालश्रेणीच्या मध्य बिंदूच्या विरुद्ध स्थानांकित केली जाते. काळ निश्चित करुन ही क्रिया परत केली जाते. ३ वर्षाची धावती सरासरी काढताना प्रथम पहिल्या ३ संख्यांची बेरीज दिलेल्या मालिकेतील पहिली संख्या वगळून आणि पुढच्या वर्षाची बेरी करुन तिला ३ ने भागले जाते. ५ वर्षाची सरासरी काढताना पहिल्या ५ संख्यांची बेरीज केली जाते व तिला ५ ने भागले जाते. त्यानंतर पहिली संख्या सोडून पुढच्या ३ किंवा ५ संख्या यांची बेरीज केली जाते. याप्रमाणे सरकती सरासरी मिळविली जाते. दिलेल्या मालिकेच्या शेवटच्या संख्येपर्यंत ही क्रिया चालू ठेवली जाते. ३ वर्षाच्या सरासरीची सुरुवात पहिले स्थान सोडून दुसर्या स्थानापासून केली जाते तर ५ वर्षाच्या धावत्या सरासरीची सुरुवात पहिली दोन स्थाने सोडून तिसऱ्या स्थानापासून केली जाते.

बदलते प्रवाह अभ्यासण्यासाठी धावती सरासरी प्रामुख्याने वापरली जाते. भूगोलामध्ये हे तंत्र प्रामुख्याने तापमान, पर्जन्यमान अशा हवामानसंबंधी सांख्यिकी करीता वापरले जाते. अशी सरासरी आलेखाच्या सहाय्याने दाखवून कालसंदर्भित श्रेणीतील चढ उतार कसे झाले आहेत. याची माहिती मिळते.

फायदे -

१) धावती सरासरी प्रामुख्याने काळानुसार होणारा बदल तसेच चक्रीय बदल अभ्यासण्यासाठी वापरली जाते.

२) या पद्धतीमध्ये कोणतीही किचकट मोजणी असत नाही त्यामुळे ही पद्धत वापरण्यास सोपी व सुलभ आहे.

३) योग्य काळ शोधल्यानंतर त्यातील चढ उतार आपोआप काढले जातात.

४) या पद्धतीमध्ये लवचिकता असते.

तोटे -

१) ही पद्धती भविष्यकालीन बदलत्या मूल्यांचे किंवा किंमतीचे अंदाज करण्यासाठी योग्य नसते. किंबहुना सरकती सरासरीत याबाबतचे कुठचेही नियम नाहीत.

२) ही पद्धती केवळ रेषीय बदल दर्शविते. अरेषीय प्राप्त झालेल्या किंमती ह्या पक्षपाती आणि प्रत्यक्ष किंमतीपासून दूर जाणार्या असतात.

३) या पद्धतीमध्ये जी चक्रियता असते तशी प्रत्यक्ष माहितीमध्ये नसते.

उदा. खाली दिलेल्या सांख्यिकीय माहितीच्या आधारे ३ व ५ वर्षाची सरकती सरासरी काढा.

वर्ष	मूल्य	३ वर्षाची बेरीज	३ वर्षाची सरकती सरासरी	५ वर्षाची बेरीज	५ वर्षाची सरकती सरासरी
२०००	४.३				
२००१	२.६	१२.२	४.०		
२००२	४.३	१२.१	४.०	१९.८	२.९
२००३	४.२	११.९	२.६	२०.७	४.१
२००४	२.४	११.८	२.६	१९.७	२.९
२००५	४.२	११.२	२.७	१२.८	२.५
२००६	२.६	१०.२	२.४	१२.९	२.५
२००७	२.४	१०.३	२.४	१२.९	२.५
२००८	४.३	१०.१	२.३	१६.९	२.३
२००९	२.४	१०.९	२.६	१५.९	२.१
२०१०	२.२	९.२	२.०	१६.७	२.३
२०११	२.६	९.०	२.०	१६.६	२.३
२०१२	२.२	१०.०	२.३	१५.४	२.०
२०१३	४.२	९.६	२.२		
२०१४	२.२				

प्रसामान्य वितरण -

सर्वसाधारणपणे प्रथमत: सुरुवातीला वारंवारिता माध्यापर्यंत वाढत जाते व नंतर परत ती कमी कमी होत जाते. त्या वितरणाला प्रसामान्य वितरण असे म्हणतात. दिलेल्या साधनसामग्रीचे वारंवारिता कोष्टक तयार केल्यानंतर सुरुवातीला माध्यापर्यंत वारंवारिता वाढत जाते व नंतर माध्यापासून ती त्याचप्रमाणात कमी कमी होत जाते. म्हणजे मध्यवर्ती मापनाच्या दोन्हीही बाजूला सारखेच वितरण पदमालेत दिलेले असते. या पदमालेतील केंद्रीय प्रवृत्ती तपासण्याचा प्रयत्न केल्यास ती सारखीच असते. म्हणजे Mean, Median, Mode या तिन्हीचीही किंमत व मुल्य सारखेच असते. जर हेच वारंवारिता वितरण आलेख कागदावर दाखविल्यास वारंवारिता / वितरण आलेख घंटेच्या आकारासारखा दिसतो.

म्हणून त्याला बेल शेप कर्व्ह असे म्हणतात. या वितरणातील विचलनाचा विचार केल्यास विचलन शून्य (दोन्ही बाजूला सारखेच) असते. यालाच समवाटप असेही म्हणतात. या आकृतीमध्ये समांतर माध्यापासून किंवा केंद्रीय प्रवृत्तीपासून दोन्हीही बाजूला अंतर सारखेच असते. या वितरणातील मध्य, मध्यगा व बहुलक समान असतात. विचलनाची (समांतर माध्यापासून) बेरीज (+, - करुन) ० असते. अशा प्रकारची भौगोलिक आकडेवारी बऱ्याचदा उपलब्ध होत असते.

आलेख -

२) विषमता (विषय वाटप) -

दिलेल्या आकडेवारीत किंवा पदमालेत Mean, Median, Mode समान नसतील तर त्या वितरणास विषम वाटप असे म्हणतात. ही विषम वाटणी म्हणजेच विषमता होय. ही विषमता लहान संख्येच्या भागाकडे म्हणजे माध्य येण्यापूर्वीच्या भागात असेल किंवा मोठया संख्येच्या भागात म्हणजे माध्यानंतरच्या भागात असेल.

आलेख -

वैशिष्टये -

१) या वितरणात Mean, Median, Mode याची किंमत सारखी नसते.

२) समांतर माध्यापासून दोन्हीही बाजूला अंतर सारखे नसते.

३) विचलनाची बेरीज ० नसते.

४) साधनसामुग्रीच्या आधारे काढलेल्या वक्र घंटेच्या आकाराचा नसतो म्हणजेच साधनसामुग्रीच्या मध्यवर्ती मापनाच्या दोन्ही बाजू सारख्या नसतात.

विषमतेचे प्रकार -

विषमतेचे मुख्य दोन प्रकार

१) धन विषमता

२) ऋण विषमता

१) धन विषमता -

विषमता माध्यानंतरच्या भागात किंवा वारंवारिता उच्चतम भागाच्या उजवीकडे प्रमाण जास्त असेल त्यास धन विषमता असे म्हणतात.

आलेख -

२) ऋण विषमता -

विषमता मध्या अगोदरच्या भागात असेल किंवा वारंवारिता उच्चतम शिखर भागाच्या डावीकडील प्रमाण जास्त असेल तर त्याला ऋण विषमता असे म्हणतात.

आलेख -

विषमता मापनाच्या पद्धती -

विषमता गुणक काढण्यासाठी दोन पद्धतीचा उपयोग होतो. त्या पद्धती पुढीलप्रमाणे -

अ) कार्ल पिअरसन विषमता गुणक पद्धती -

कार्ल पिअरसन याने विषमता काढण्याचा प्रयत्न केला त्याने ज्या पद्धतीचा उपयोग केला त्याला कार्ल पिअरसन विषमता गुणक असे म्हणतात. यांच्या पद्धतीमध्ये दिलेल्या साधनसामुग्रीत समांतर माध्य व बहुलक समान नसतील तर विषमता काढता येते. माध्य व बहुलक यांच्यामधील अंतर काढून त्या अंतराला त्या पदमालेतील प्रमाण विचलनाचे भागणे म्हणजे विषमता गुणक होय. त्याच्यासाठी खालील सूत्राचा वापर केला जातो.

$$SK=\frac{\text{mean-mode}}{\text{Standard Deviation}}$$

SK विषमता गुणक

उदा. पुढे जी आकडेवारी दिलेली आहे त्याच्यावरुन कार्ल पिअरसनचा विषमता गुणक काढा.

माध्य - ४४

बहुलक - ४२

प्रमाण विचलन १२

ब) बोलीचा विषमता गुणक -

साधन सामुग्रीतील किंवा आकडेवारीतील विषमता काढण्यासाठी बोली याने प्रथम प्रयत्न केला. याने विसंगती मापन काढण्यासाठी विचलनाचा किंवा गुणात्मक उपयोग केला तर वितरण किंवा वाटणी सम असेल तर तिसऱ्या विचलनाचे अंतर पहिल्या विचलनाच्या मध्यगा एवढे असते. बोलीचा विषमता गुणक नेहमी + - च्या दरम्यान असतो.

सूत्र

क) क्युरतोसिस -

एखाद्या वितरणातील मध्यवर्ती मापन, विचलन व विषमता याच्याशिवाय चौथा भाग म्हणजे क्युरतोसिस होय. क्युरतोसिस म्हणजे दिलेल्या वितरणातील वक्राकार भागातील उंच

वक्राच्या दृष्टीने किंवा शिखराच्या स्वरुपात याचा समावेश असतो. सामुग्रीतील मूल्यांच्या वितरणात ज्याची वारंवारिता सर्वात जास्त असते. तो उंच वक्राकार भाग म्हणजेच क्युरतोसिस होय.

आलेख -

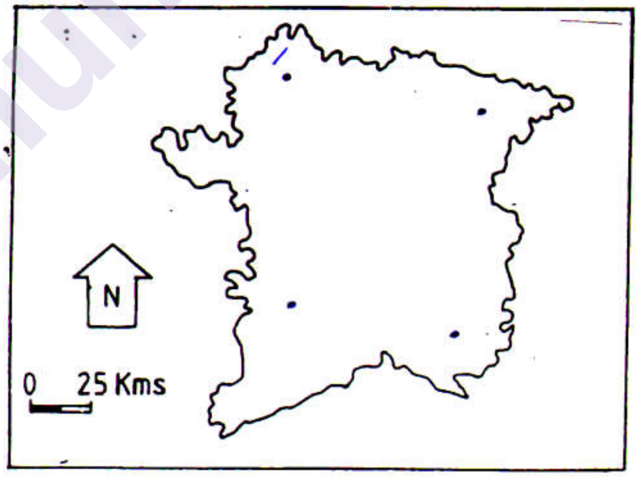
भूगोलामध्ये एखाद्या प्रदेशातील किंवा एखाद्या भागातील इतर प्रदेशापासून उंच भाग जाण्यासाठी क्युरतोसिसचा उपयोग केला जातो. कारण पृथ्वीची भुपृष्ट रचना सर्वच ठिकाणी सारखीच नसते. काही ठिकाणी सपाट भाग तर काही ठिकाणी उंच भाग असतो. एवढेच नव्हे तर काही ठराविक सपाट भागात सुद्धा काही उंच भाग असतो. आणि हा उंचच उंच भाग जाणून घेण्यासाठी या क्युरतोसिसचा उपयोग केला जातो. संख्याशास्त्रामध्ये दिलेली साधनसामुग्री असेल तर अशा साधनसामुग्रीत एखाद्या किंवा त्यापेक्षा जास्त उंच भाग निर्माण झाला आहे काय ते पहाण्यासाठी या पद्धतीचा उपयोग करतात. सर्वसाधारणपणे वक्राच्या सहाय्याने शिखराचा भाग किती उंच आहे. याच्यावरुन क्युरतोसिस चे पुढील तीन प्रकार पडतात.

अ) लेप्टो क्युरतीक -

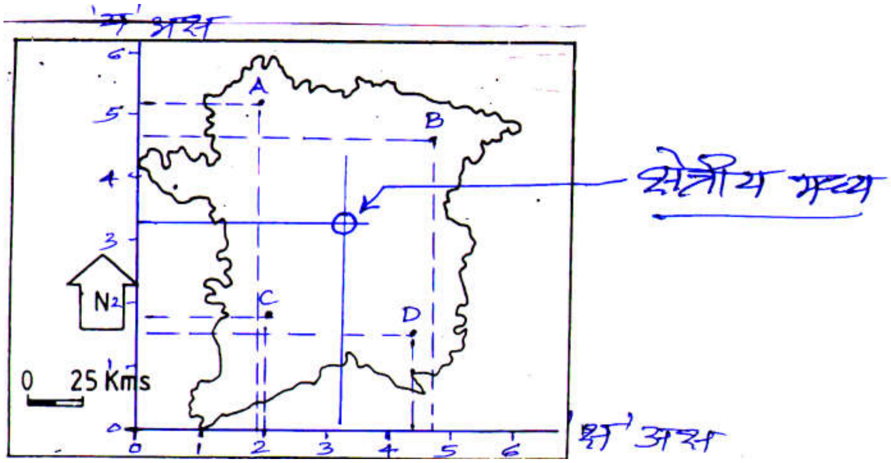
जेव्हा सर्वसामान्य वक्रापेक्षा जास्त उंचीचा वक्र तयार होतो त्याला लेप्टोक्युरतीक असे म्हणतात. म्हणजेच बहुलकाच्या बाजुला सर्वच आकडेवारी जवळ

२.७ क्षेत्रीय मध्य (AREA MEAN)

प्र. १ सोबत दिलेल्या नकाशाचा वापर करुन क्षेत्रीय मध्य काढा.



कृती - सोबतच्या नकाशात चार बिंदू दर्शविले आहेत नकाशाच्या दक्षिणेकडील सीमेला स्पर्श करुन 'क्ष' अक्ष काळा व पश्चिमेकडील सीमेला स्पर्श करुन 'य' अक्ष काढा.



नकाशातील चार A, B, C व D बिंदूना अशी नावे दिली व 'क्ष' आणि अक्षाच्या संदर्भात त्यांचे सहगुणक (co-ordinates) काढले. $A(1.8,5.2), B(4.7,4.7), C(2,1.8)$, $D(4.3,1.6)$

या सहगुणकांची सरासरी काढण्यासाठी त्यांची बेरीज करुन बिंदूच्या संख्येने r भागावे लागेल.

बिंदू	**'क्ष' सहगुणांक**	**'य' सहगुणांक**
A	१.८	५.२
B	४.७	४.७
C	२.०	१.८
D	४.३	१.६
एकूण	१२.८	१२.३
सरासरी	$12.8 \div 4 = 3.2$	$13.3 \div 4 = 3.3$

वरील तक्त्यानुसार क्षेत्रीय मध्याचे सहगुणांक ('क्ष' = २.२) व ('य' =२.३) आहेत. आपल्याला दिलेल्या नकाशात या सहगुणांना छेदन बिंदू स्थापन करुन आपल्याला दिलेल्या नकाशाचा क्षेत्रीय मध्य काढा.

❖❖❖❖

३

सहसंबंध व प्रतिगमन / समाश्रयण

घटक रचना :

३.० उद्दिष्टे

- सहसंबंध तंत्राची माहिती घेणे.
- समाश्रयण / प्रतिगमन तंत्राची माहिती घेणे.
- गृहित तत्व चाचण्या समजून घेणे.

३.१ प्रस्तावना

एखाद्या गुंतागुंतीच्या किंवा क्लिष्ट अभ्यास विषयाबाबत आपण प्रश्नोत्तरुपाने माहिती जमा करतो, ती कोष्टकात मांडतो. त्यावरुन काही साधारणमान व विस्कलनाची मापे काढतो. माहिती कोष्टकात मांडल्याने साधारणमान व विस्कलमान काढल्याने संशोधन विषयाबाबत काही बोलणे आपणास शक्य होते. परंतु साधारणमान किंवा विस्कलमान काढणे जेव्हा एकाच चलाचा विचार करावयाचा असतो तेव्हा योग्य असते. काही वेळा एखाद्या घटनेत किंवा अभ्यासात एकापेक्षा अधिक चलांचा विचार करावा लागतो. त्यावेळी साधारणमाने किंवा विस्कलनाने पुरेशी ठरत नाहीत. उदाहरणार्थ जर आपण एका खेड्यातील शेतकऱ्यांकडून त्यांचे उत्पन्न, खतांचा वापर, पाण्याचा वापर, बियाणांचे प्रकार, पर्जन्यमान वगैरे बाबींची गेल्या दहा वर्षातील माहिती जमा केली तर केवळ उत्पन्न खते, पाणी यांची साधारणमाने व विस्कलमाने काढून जमा केलेल्या आकडेवारीचा अभ्यास पूर्ण होत नाही. परंतु आपण जर एका शेतकऱ्यांचे उत्पन्न व पाणी या दोन चलात काही संबंध दिसून येतो. त्याचप्रमाणे ठिकठिकाणच्या रस्त्यावरुन जाणाऱ्या वाहनांची संख्या, रस्त्याची रुंदी व होणारे अपघात याबाबत आपण जर आकडेवारी जमा केली व ती शेजारी ठेऊन पाहिली तर असे दिसेल की वाहनांची संख्या जशी वाढत जाते तशी अपघातांची संख्या वाढत जाते. या प्रकारच्या दोन चलातील संबंधाला सहसंबंध म्हणतात. संशोधकाला दोन चलांमध्ये काही

सहसंबंध आहे का हे ही तपासून पहावे लागते. “दोन किंवा अधिक चलांमध्ये असणाऱ्या संबंधाचे अस्तित्व ठरविणे, त्याची दिशा ठरविणे व त्याचे मोजमाप करणे.”

३.२ सहसंबंधाचे प्रकार

सहसंबंधाचे मुख्यत: दोन प्रकार केले जातात.

१) धन व ऋण सहसंबंध

२) एकरेषीय व नैकरेषीय सहसंबंध

१) धन व ऋण सहसंबंध :

धन व ऋण सहसंबंध हा फरक कोणत्या दिशेत चले बदलत जातात त्यावर अवलंबून असतो. जर दोन्ही चले एकाच दिशेत बदलत असतील म्हणजे जेव्हा एक चल वाढत जाते तेव्हा दुसरेही वाढत जाते किंवा जेव्हा एक चल कमी होत जाते तेव्हा दुसरेही कमी होत जाते, असे असेल तर त्या दोन चलातील सहसंबंध धन आहे असे म्हणतात. उदाहरणार्थ तांदळाचे उत्पादन व पर्जन्यमान, कुटुंबाचे उत्पन्न व चैनीच्या वस्तूवरील खर्च, वस्तूंची विक्री व जाहिरातीवरील खर्च यामधील सहसंबंध धन आहे. उलटपक्षी जर चले विरुद्ध दिशेने कमी होत असतील किंवा जेव्हा एक चल कमी होत जाते तेव्हा दुसरे वाढत जाते असे होत असेल तर त्या दोन चलातील सहसंबंध ऋण आहे असे म्हणतात. उदाहरणार्थ औषधाचा खप वाढला आणि मृत्यूचा दर कमी झाला, वस्तुंची किंमत व मागणी यामधील सहसंबंध ऋण असतो.

त्याचप्रमाणे एका चलातील बदलाचे दुसऱ्या चलातील बदलाशी असणारे प्रमाण नेहमी कायम असेल तर त्या चलातील सहसंबंधास पूर्ण सहसंबंध म्हणतात. अर्थात असा आदर्श सहसंबंध व्यावहारिक विश्वात क्वचितच आढळतो. सामान्यपणे जर एका चलातील बदल व दुसऱ्या चलातील बदल जवळपास सारख्या प्रमाणात होत असतील तर त्या दोन चलात उच्च सहसंबंध आहे असे म्हणतात. उदाहरणार्थ तांदळाचे उत्पादन व पावसाचे प्रमाण यात उच्च सहसंबंध आहे. याउलट एका चलातील बदल व दुसऱ्या चलातील बदल कमी प्रमाणात होत असतील तर त्या दोन चलात कमी सहसंबंध आहे असे म्हणतात. उदाहरणार्थ एखाद्या विद्यार्थ्याचे वजन व त्या विद्यार्थ्यांचे परीक्षेतील यश यामध्ये कमी सहसंबंध आहे. एका चलातील बदल व दुसऱ्या चलातील बदल यात काहीच संगती नसेल तर त्या दोन चलात शून्य सहसंबंध आहे असे म्हणतात.

२) एकरेषीय व नैकरेषीय सहसंबंध :

हा फरक सहसंबंधाच्या आलेखावर आधारित आहे. ज्या दोन चलात सहसंबंध आहे, त्याचा आलेख काढला व तो जर एक सरळ रेषा असेल तर त्या चलातील सहसंबंधास एकरेषीय सहसंबंध म्हणतात. आणि आलेख जर रेषा नसेल तर तया सहसंबंधास नैकरेषीय सहसंबंध म्हणतात.

एकरेषीय सहसंबंध असताना एका चलातील बदलाचे दुसऱ्या चलातील बदलाशी असणारे प्रमाण सर्व ठिकाणी सारखेच असते. म्हणजे एका ठिकाणी क्ष मधील बदल १० असेल तर य मधील बदल ८ असेल व दुसऱ्या ठिकाणी जर क्ष मधील बदल ५ असेल तर य मधील बदल ४ असेल.

उलट नैकरेषीय सहसंबंधात हे प्रमाण स्थिर असत नाही. म्हणजे एके ठिकाणी क्ष मधील बदल १० व य मधील बदल ८ असेल तर दुसऱ्या ठिकाणी क्ष मधील बदल ५ व य मधील बदल ३ होईल.

पूर्ण सहसंबंध (धन किंवा ऋण) आणि एकरेषीय सहसंबंध या संज्ञा समानार्थी आहेत. सहसंबंध जेव्हा पूर्ण असतो तेव्हा त्याचा आलेख एक सरळ रेषा असते. म्हणजेच तो एकरेषीय असतो. फरक इतकाच की पूर्ण धन सहसंबंध असेल तर आलेख चढती रेषा असतो व पूण ऋण सहसंबंध असेल तर आलेख उतरती रेषा असतो.

एकरेषीय सहसंबंध

क्ष	य	क्ष	य
१	५	१०	२५
२	१०	२०	२०
३	१५	३०	१५
४	२०	४०	१०
५	२५	५०	५

आलेख :

नैकरेषीय सहसंबंध

क्ष	य	क्ष	य
१०	२०	१०	७५
२०	३०	२०	६०
३०	४५	३०	५४
४०	५६	४०	४०
५०	५०	५०	२३
६०	३६	६०	०८

ब) सहसंबंध परिमाण :

सहसंबंध आहे एवढ्याच माहितीचे सांख्यिकाला समाधान लाभणे शक्य नाही म्हणून त्या सहसंबंधाचे परिमाण शोधणे आवश्यक ठरते. प्राकृतिक शास्त्रात हा संबंध निरपेक्ष असतो. त्याकरिता उष्णता व विद्युत संबंधी असलेले निरनिराळ्या शास्त्रज्ञांचे नियम विचारात घेतले जातात.

सहसंबंध हा निरनिराळ्या प्रमाणात आढळतो. एखाद्या वस्तूच्या परिमाणात वाढ न होता केवळ तिच्या मागणीतच वाढ होत असेल व मागणीच्या प्रमाणात मूल्य देखील वाढत असेल तर त्याला पूर्ण निश्चित सहसंबंध असे म्हणतात. उदा. खनिजांची मागणी वाढत असली तरी त्यांच्या उत्पादनावर मर्यादा असतात. त्यामुळे खनिजांच्या किमंतीतही वाढ होते. म्हणजेच येथे निर्माण होणारा सहसंबंध हा पूर्ण निश्चित सहसंबंध असतो. समजा मागणीतील वाढ २५ टक्के आहे व मूल्य देखील २५ टक्के ने वाढले तर तेथे पूर्ण निश्चित संबंध आहे असे समजण्यात येईल. समजा एखाद्या प्रदेशाच्या क्षेत्रफळाचा संबंध तिच्या जमिनीच्या बाजूच्या लांबीशी असेल तर त्यांच्यात होणारे परिवर्तन एकाच दिशेने होऊन परिवर्तनाच्या प्रमाणातही साम्य असेल तर अशावेळी तेथे परिपूर्ण अनुलोम सहसंबंध आहे असे समजण्यात येते.

सहसंबंध पूर्णत: अनुलोम किंवा पूर्णत: विलोमच असेल असे म्हणता येत नाही. तो अंशिक अनुलोम व अंशिक विलोम देखील असू शकतो. विशेषत:क आर्थिक किंवा सामाजिक विषयाबाबतच्या अंकात सहसंबंध पूर्ण अंशाने आढळत नाही. जर मागणी १० टक्के ने वाढली तर किंमतीमध्ये देखील अगदी १० टक्के नेच फरक पडेल असे म्हणता येत नाही. ती वाढ कमी-जास्त असू शकते. या प्रसंगी 'अंशिक अनुलोम सहसंबंध' आहे असे समजण्यात येईल.

दोन गोष्टीत मुळीच सहसंबंध नाही अशी उदाहरणे देखील अनेक आहेत. उदाहरणार्थ नदीच्या पात्राची रुंदी व नदीजवळच असलेल्या रस्त्याची रुंदी. नदीच्या पात्राची रुंदी व नदीजवळच्या रस्त्याच्या रुंदीचे अंक यात कोणत्याही प्रकारचा सहसंबंध नाही असेच म्हणावे लागेल.

सहसंबंध अशा ठिकाणी संभवतो जेथे दोन गोष्टींचा आपसात प्रत्यक्ष किंवा अप्रत्यक्ष संबंध असतो. तसा संबंध नसेल तर उदाहरणार्थ सिंधुदुर्गातील काजूच्या उत्पन्नाबाबत अंक व्यक्त करणारी पदमाला व रत्नागिरीतील आंब्यांच्या निर्मितीबाबतच्या अंकाची पदमाला घेतल्यास व त्या दोहोंमध्ये गतवर्षीच्या मानाने वृद्धी आढळून आल्यास ती सहसंबंध व्यक्त करते असे मानणे योग्य ठरणार नाही. तो केवळ योगायोग ठरेल.

सहसंबंधाच्या अभ्यासात आपण निरनिराळ्या पायर्यांची श्रेणी तयार करु शकतो. जर पूर्णत: अनुलोम सहसंबंध असेल तर त्याला आपण +१ असे म्हणतो. वास्तविक असा संपूर्ण अनुलोम सहसंबंध अगदीच क्वचित आढळतो. हा संबंध बहुधा कमी होत जातो आणि पूर्णत्वाची मात्रा पूर्णत्वापासून हळूहळू कमी होऊन शेवटी शून्य होते व तेथे सहसंबंधाचा लोप होतो. काही पदमालामध्ये सहसंबंध विपरीत दिशेने वाढत असतो. तो वाढत वाढत शेवटी पूर्ण विलोम पर्यंत जातो. सहसंबंधाच्या दोन मात्रा ठरतात. प्रथम उच्चतम सीमा व

दुसरी न्युनतम सीमा. प्रथम सीमा पूर्ण अनुलोम (तिचे चिन्ह +१) व दुसरी सीमा पूर्ण विलोम (तिचे चिन्ह -१) होय. संपूर्ण सहसंबंध क्वचितच अस्तित्वात असतो. तो बहुधा अंशिक स्वरुपातच अस्तित्वात असतो. म्हणजेच सहसंबंध नेहमी +१ व -१ याच्या मध्ये कुठेतरी असतो. आपण ज्या दोन पदमालांमध्ये संबंध पाहतो, त्यापैकी प्रथम पदमालेला कर्ता पदमाला असे म्हणतात. व ज्या पदमालेचा सहसंबंध पाहतो तिला 'संबंधी पदमाला' असे म्हणतात. त्या दोन पदमालांचा सहसंबंध काढण्यासाठी ज्या मापाचा आपण उपयोग करतो त्या मापाला सहसंबंध गुणक असे म्हणतात.

क) सहसंबंध काढण्याच्या निरनिराळ्या पद्धती :

सहसंबंध काढण्याच्या पद्धतीचा विचार करण्यापूर्वी एक गोष्ट लक्षात ठेवली पाहिजे की दोन पदमालांचा सहसंबंध व दोन 'वर्गाचा' सहसंबंध यात फरक आहे. त्या दोन्हींचा सहसंबंध काढतना सर्वच पद्धतीचा प्रत्येक वेळी उपयोग होऊ शकेलच असे म्हणता येत नाही. दोन पदमालांचा सहसंबंध काढतना सर्वच पद्धतीचा प्रत्येक वेळी उपयोग होऊ शकेलच असे म्हणता येत नाही. दोन पदमालांचा सहसंबंध काढताना 'काळ' अधिक महत्त्वाचा समजण्यात येतो. ठराविक काळात दोन पदमालांमध्ये जी उच्चावचने घडतात त्यांची आपसात तुलना करण्यात येते. उदाहरणादाखल आपण गव्हाचे १५ वर्षांचे उत्पादन व त्या वर्षात झालेली आयात-निर्यात अथवा एका वर्षातील बारा महिन्यात एखाद्या वस्तूची मागणी व त्या बारा महिन्यात त्या वस्तूचे मूल्य याची तूलना या गोष्टी घेऊ या. यात त्याच ठराविक समयाबाबत दोन्ही पदमालांची मूल्ये आहेत. या प्रकारच्या पदमालांना कालिक चलांची उदाहरणे म्हणतात. या उदाहरणात काळाला महत्त्व असते.

उलट जे अकालिक चल असतात, त्याचा सहसंबंध काढताना काळाचे महत्त्व नसते. त्यांना 'वर्ग' म्हणतात. उदा. निरनिराळ्या व्यक्तींची उंची व त्यांचे वजन याचा सहसंबंध किंवा आई-मुलांच्या उंचीचा सहसंबंध हा वर्ग कक्षेत येतो. तेथे काळाचा संबंध येत नाही.

सहसंबंध काढण्याच्या खालील पद्धती आहेत -

१) कार्ल पिअरसनच्या सहसंबंध गुणकाच्या मदतीने सहसंबंध काढणे.

२) संगामी विचलन गुणकाच्या मदतीने सहसंबंध काढणे.

३) बिंदूरेखाच्या मदतीने सहसंबंध काढणे.

४) विक्षेप चित्राच्या मदतीने सहसंबंध काढणे.

५) पिअरसनच्या पद्धतीने काढणे.

१) कार्ल पिअरसनच्या पद्धतीने सहसंबंध काढणे :

कोणत्याही दोन पदमालांमध्ये सहसंबंध आहे किंवा नाही एवढेच त्या दोन पद्धतींच्या मदतीने कळते एवढे मात्र येथे नमूद करणे आवश्यक वाटते. म्हणजेच दोन पदमालांमध्ये सहसंबंध असल्यास तो कितपत आहे या बाबतची माहिती त्या पद्धतींनी मिळत नाही. सहसंबंधाचे अस्तित्व किंवा अभाव याबाबतच माहिती मिळते. म्हणून सहसंबंधाचे माप

किंवा परिमाणाचे अंक त्या पद्धतींद्वारे काढता येत नाहीत. एवढी गोष्ट स्पष्ट आहे. त्यासाठी ती पद्धती अनुपयुक्त आहे.

सहसंबंध गुणक काढण्यासाठी सर्वात प्रथम प्रयत्न व अनुसंधान करण्याचे श्रेय श्री. कार्ल पिअरसन यांना आहे. त्यांनी प्रयत्नांती जे सूत्र शोधून काढले त्याच्या मदतीने सहसंबंधाचे परिमाण बऱ्याच अंशी काढणे शक्य झाले आहे. ती पद्धती समाधानकारक असल्याने बरीच प्रचलित झाली आहे. त्या सूत्राला माप ही त्याच्या जनकाचेच दिले आहे. त्याला सहसंबंध काढण्याचे कार्ल पिअरसनचे सूत्र म्हणतात. त्या सूत्राची मांडणी खालील पद्धतीने करण्यात येते.

या सूत्रात $r = \frac{Edxdy}{nX\sigma xx\sigma y}$

या सूत्रात $r =$ coefficient of correlation

Edxdy = The sum of the products of the pairs of deviations from the respective means of two series

n = total no. of pairs of items.

$\sigma x =$ S.D. of x series

$\sigma x =$ S.D. of y series

या सूत्राचा उपयोग करण्यासाठी प्रथम कर्ता पदमाला लिहितात आणि नंतर काही अंतरावर दुसरी संबंधी पदमाला लिहितात. नंतर दोन्ही पदमालांची मध्यके काढतात. त्यानंतर प्रथम पदमालेच्या प्रत्येक पदाचे व त्या पदमालेच्या मध्यकापासून विचलन काढण्यात येते व ते विचलन पुढच्या स्तंभात लिहिण्यात येते. त्याला x संकेत शब्दाने संबोधतात. विचलन काढून ते त्या पदमालेपुढे लिहिण्यात येते. त्याला y संकेत शब्दाने संबोधतात. त्यानंतर x व y दोन्हींचे वर्ग काढून x वर्ग व y वर्ग या संकेत शब्दाने त्यांना संबोधून ते अनुक्रमे x व y च्या पुढच्या स्तंभात लिहिण्यात येतात. सर्वात शेवटच्या स्तंभात x व y चा गुणाकार लिहिण्यात येतो. त्याला xy संकेत शब्दाने व्यक्त करतात. त्या xy स्तंभाच्या बेरजेला Exy या संकेत शब्दाने व्यक्त करतात. एकूण संख्येसाठी ह हा संकेत शब्द आहे. नंतर मागे पाहिलेल्या पद्धतीने दोनी पदमालांचे प्रमाण विचलन काढण्यात येते. त्यांना अनुक्रमे x व y या संकेत शब्दाने व्यक्त करतात.

सहसंबंध गुणकाचे निर्वचन :

पदमालांचा सहसंबंध गुणक +१ (परिपूर्ण अनुलोम सहसंबंध) आणि -१ (परिपूर्ण विलोम सहसंबंध) यांच्या मध्यंतरी असतो. ज्यावेळी गुणक ० असतो त्यावेळी त्या पदमालांमध्ये मुळीच सहसंबंध नसतो. पुढचा प्रश्न म्हणजे जर सहसंबंध असेल तर स्पष्ट आहे काय? त्यासाठी गुणकाच्या संभाव्य विभ्रमावर आधारलेलया खालील चार मुद्यांवर विचार करावा लागेल -

१) जर r संभाव्य विभ्रमापेक्षा कमी असेल तर चलांमध्ये सहसंबंधाचे मुळीच अस्तित्व नसेल.

२) जर r संभाव्य विभ्रमाच्या सहापटीपेक्षा जास्त असेल तर सहसंबंध स्पष्ट आहे. म्हणजे त्याचे निश्चित अस्तित्व आहे असे म्हणावे लागेल.

३) जर r ०.३० पेक्षा कमी असेल आणि संभाव्य विभ्रम देखील त्याच प्रमाणात कमी असेल तर सहसंबंध स्पष्ट आहे असे समजले जाऊ शकणार नाही.

४) जर r ०.५० पेक्षा जास्त असेल आणि संभाव्य विभ्रम त्या मानाने कमी असेल तर सहसंबंध निश्चितपणे अस्तित्वात आहे असे समजावे.

जर r लहान असेल आणि ह जास्त नसतील तर संभाव्य विभ्रम आम्हाला चुकीच्या निष्कर्षाकडे घेऊन जाऊ शकतो ही गोष्ट लक्षात ठेवली पाहिजे. म्हणून ह भरपूर प्रमाणात असणे अत्यावश्यक होय. ह भरपूर प्रमाणात असेल तर मग सहसंबंध गुणकाच्या व संभाव्य विभ्रमाच्या सूत्राद्वारे काढलेले निष्कर्ष विश्वसनीय ठरतील.

सहसंबंध गुणकाचे निर्वचन करताना वरील चारही नियम लक्षात असले पाहिजेत. सहसंबंध साधरणत: योग्य असतो हे या ठिकाणी स्पष्ट होते. तसेच उदा. पुरवठा व वस्तूंचे मूल्य यात घनिष्ट विलोम सहसंबंध असेल तर पुरवठ्यामध्ये झालेली वाढ हेच किंमत कमी होण्याचे एकमेव कारण आहे. असाही अर्थ लावणे बरोबर होणार नाही. मूल्य कमी होण्याची अन्य अनेक कारणे देखील असू शकतात. म्हणून दोन पदमालांमध्ये सहसंबंध आहे. एवढ्यावरुनच प्रत्येक वेळा त्या चलामध्ये परस्परात प्रत्यक्ष कारण व परिणाम संबंध आहे असे म्हणता येणार नाही.

२) संगामी विचलन-गुणक पद्धती :

कार्ल पिअरसन पद्धतीलाच सम प्रॉडक्ट गुणन योग पद्धतीदेखील म्हणतात. कारण त्यात सहसंबंध गुणक विचलनाच्या गुणाकारावर अवलंबून असतो. परंतु या पद्धतीत दोन्ही चल-मालांमध्ये होणाऱ्या परिवर्तनाची केवळ दिशा दाखविण्यात येते. ज्यावेळी एका चलामध्ये होणाऱ्या परिवर्तनाची केवळ दिशा चलाच्या परिवर्तनावर काय परिणाम होतो व परिणाम होत असेल तर कोणत्या प्रकारचा व कोणत्या दिशेने हे ओळखायचे असेल तर मग संगामी विचलन गुणक पद्धतीचा उपयोग करतात. कार्ल पिअरसनच्या पद्धतीशी तुलना केली असता ही संगामी विचलन गुणक पद्धती अल्पकालीन परिवर्तनाचे अध्ययन करण्यासाठी बरीच सोपी आहे. दीर्घकालीन परिवर्तनाबाबत मात्र ही पद्धती उपयुक्त ठरत नाही कारण त्या पद्धतीत चलाची सामान्य प्रवृत्ती किंवा उपनितेवर विचार अवलंबून ठेवण्यात येत नाही.

या पद्धतीत समांतर माध्यापासून अथवा चल माध्यापासून विचलन न काढता मागच्या आकड्यांशी तुलना करता परिवर्तन कोणत्या दिशेने होत आहे याच गोष्टींचा विचार करण्यात येतो. परिवर्तन कितपत झाले आहे या गोष्टीचा देखील विचार करण्यात येत नाही. या पद्धतीने सहसंबंध गुणक काढण्यासाठी खालील सूत्र वापरतात.

$$r = \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

या सूत्रात -

r - संगामी विचलन गुणक

n - संगामी विचलनेच्या युग्मांची संख्या

n -विचलन काढलेल्या पदयुग्मांची संख्या

कार्ल पिअरसनच्या सूत्राप्रमाणे याठिकाणी देखील +१ हे पूर्ण अनुलोम, -१ पूर्ण विलोम व ० सहसंबंधाच्या अस्तित्वात अभाव दर्शवते.

या सूत्राचा उपयोग करताना प्रत्येक चलाच्या निरनिराळ्या पदात मागील पदांशी तुलना करता, कोणत्या दिशेने परिवर्तन घडले आहे हे शोधावे लागते. म्हणजेच मागील पदांशी तुलना करता पुढच्या पदात वाढ झाली की ऱ्हास झाला हे शोधतात. जर वृद्धी झाली तर परिवर्तनाची दिशा अधिक आहे व ऱ्हास काहीच नसेल तर तो तो अंक सम (=) समजला जावा कि अशाप्रकारे चलांच्या निरनिराळ्या पदांची मागील पदांशी तुलना करता कोणत्या दिशेने परिवर्तन घडले ते काढण्यात येते व नंतर दोन्हीच्या परिवर्तनाच्या दिशेबाबत विचार करण्यासाठी दोन्हीचा गुणाकार अधिक येईल. म्हणजेच प्रत्येक पदयुग्माची दोन्ही चिन्हे समान असतील तर त्याला संगामी विलन म्हणून संबोधण्यात येईल. जर चलांच्या पदयुग्मांची चिन्हे एक दुसऱ्याला विपरीत दिशेने परिवर्तित होत असतील तर गुणाकार उणे येईल व ते असहकार दाखवतील. नंतर संगामी विचलनाची बेरीज करण्यात येईल म्हणजेच कितीचा गुणाकार अधिक आला हे पहावे. त्याला गा शब्दाने संबोधावे. नंतर वर दिलेल्या सूत्राचा उपयोग करण्यात येईल. त्या सूत्रात स म्हणजे विचलन काढण्याचा पदयुग्मांची संख्या.

वरील सूत्रात $\pm$ ची चिन्हे दोन्ही ठिकाणी दिली आहेत. जर $\left(\frac{2c-n}{n}\right)$ वजा येत ६ असेल तर मग त्याचे वर्गमूळ निघू शकणार नाही. त्या परिस्थितीत वर्गमूळ चिन्हांच्या आतील उणे चिन्ह देऊन संख्या अधिक चिन्हात आणावी लागेल व नंतर वर्गमूळ काढावे लागेल. नंतर वर्गमूळ चिन्हाच्या आरंभी देखील उणे चिन्ह देऊन उत्तर काढावे लागेल त्याप्रमाणे $\left(\frac{2c-n}{n}\right)$ ची चिन्हेच कायम ठेवून वर्गमुळ काढणे सोपे व्हावे म्हणून ही $\pm$ची चिन्हे देण्यात आली आहेत.

३) बिंदूरेखीय विधी :

वरील दोन्ही पद्धतीपेक्षा ही पद्धती सोपी आहे व तिचा उपयोग देखील फारच सोपा आहे. या पद्धतीनुसार दोन्ही चलांसाठी वक्र काढतात व नंतर काल विलंबनाची शक्यता लक्षात घेऊन दोन्ही वक्रामध्ये अनुलोम किंवा विलोम सहसंबंध आहे काय हे केवळ निरीक्षणाने शोधण्याचा प्रयत्न होतो. म्हणजे फक्त निरीक्षणाने सहसंबंधाचे अस्तित्व ओळखता येते. जर एका वक्राचे परिवर्तन दुसऱ्या वक्राप्रमाणेच असेल तर दोन पदमालांत काहीसा अनुलोम

सहसंबंध आहे असे आपण म्हणू शकतो. जर एका वक्रात एका दिशेने व दुसऱ्या वक्रात दुसऱ्या दिशेने परिवर्तन होत असेल तर दोन पदमालांमध्ये काहीसा विलोम सहसंबंध आहे असे आपण म्हणू शकतो. वक्राच्या निरीक्षणाने सहसंबंध अनुलोम आहे की विलोम एवढे जरुर कळते. पण विलोमाचे किंवा अनुलोमाचे प्रमाण किंवा सीमा मात्र कळत नाही. या पद्धतीची ही एक उणीव होय.

४) विक्षेप चित्ररीती :

सहसंबंध शोधण्यासाठी ही पद्धती देखील उपयोगात येऊ शकते. दोन पदमालांमध्ये संबंध दाखविणारे हे एक चित्र असते. वास्तविकक बिंदूरेखाने सहसंबंध दाखविण्याच्या पद्धतीचीच ही एक पद्धती होय. बिंदूरेखाचे हे एक कच्चे स्वरुप होय. बिंदूरेखीय पद्धतीत बिंदू जोडून वक्र तयार करतात. या विक्षेप चित्र पद्धतीत दोन्ही पदमालांसाठी एक माप श्रेणी घेऊन एका बिंदूरेखपत्रावर बिंदू मांडण्यात येतात. जर पदमालांमध्ये सहसंबंध असेल तर हे बिंदू सहसंबंधाच्या परिमाणाच्या प्रमाणत कमी जास्त रुंदीने एकमेकांजवळ येताना आढळतात. सहसंबंधाचे परिमाण जेवढे जास्त, तेवढेच बिंदू एकमेकाशेजारी येताना आढळतात. आपसात धन सहसंबंध असेल तर ते बिंदू एका सरळ रेषेच्या रुपाने दिसतील व त्याची दिशा डाव्या बाजूला खालून वर उजवीकडे जाताना दिसेल. सहसंबंध विलोम असेल तर रेषा याच्या उलट दिशेने जाईल. म्हणजे उजव्या बाजूच्या वरपासून निघून डाव्या बाजूस खालच्या बाजूस येईल.

खालील आकृतीवरुन वरील कल्पना स्पष्ट होतील -

भूगोल व गणित विषयात परीक्षेला असलेल्या विद्यार्थ्यांना मिळालेल्या गुणांमध्ये सहसंबंध शोधा.

विद्यार्थी	भूगोल	गणित	विद्यार्थी	भूगोल	गणित
१	७५	३०	७	२५	८०
२	४०	६५	८	१०	८५
३	३०	६८	९	९५	१०
४	८५	१८	१०	६५	३४
५	३३	७०	११	५५	४५
६	९०	५०	१२	३३	६५

विक्षेप चित्र आकृती :

वरील चित्रावरुन असे दिसते की बिंदू एकमेकांशेजारी आहेत व त्यांची दिशा उजवीकडून डावीकडे वर चढण्याची आहे म्हणून त्यात कमी जास्त प्रमाणात परिपूर्ण विलोम सहसंबंध दिसून येतो.

५) स्पिअरमनची पदस्थिती किंवा श्रेणी पद्धती :

ही पद्धती प्रोफेसर वार्लस स्पिअरमनने शोधून काढली आहे व ती पदस्थिती किंवा श्रेणीवर आधारलेली असल्याने ती वरील नावाने प्रसिद्ध झाली आहे. पदांना त्यांच्या आकाराप्रमाणे अगोदरच विन्यस्त करण्यात येते व नंतर त्यांना पदस्थिती देण्यात येतात. नंतर पदस्थितीमधील फरक काढण्यात येतो व त्याला प संकेत शब्दाने संबोधण्यात येते. नंतर खालील सूत्राच्या मदतीने सहसंबंध गुणक काढतात.

या सूत्रात - $r = 1 - \frac{\sigma(Ed^{२})}{n(n^{२} - १)}$

स्पिअरमनच्या सूत्राने काढलेल्या सहसंबंधाचा संकेत शब्द = प आहे. n = संख्या $Ed^{२}$ पदस्थितीच्या फरकाच्या वर्गाची बेरीज.

स्पिअरमनच्या पद्धतीने पदमूल्यांची पदस्थिती (क्रम किंवा स्थान) निश्चित करताना केव्हा केव्हा दोन पदमूल्ये समान आढळतात. अशा वेळी त्यांना कोणत्या नियमानुसार स्थान किंवा पदस्थिती द्यावी हा एक प्रश्न उपस्थित होतो. या प्रश्नाचा निर्णय खालील दोन पद्धतीमधून कोणत्याही एका पद्धतीचा अवलंब करुन करण्यात येतो. परंतु सामान्यत: दुसऱ्या पद्धतीचाच उपयोग करतात.

अ) ब्रकेटची पदस्थिती पद्धती :

या पद्धतीत चलांच्या समान पदमूल्याच्या सर्व पदांना सारखीच पदस्थिती देण्यात येते. आणि नंतरच्या पदमूल्याला अशाप्रकारे पदस्थिती देण्यात येते की जणू समान पदमूल्य अस्तित्वात नसताना द्यावी लागत आहे.

आ) मध्य-पदस्थिती पद्धती :

या पद्धतीत चलाच्या समान पदमूल्याच्या पदांना समान पदस्थिती असते. ही सर्व चलांनी अंगिकारलेल्या पदस्थितीची सरासरी असते. चलातले दुसरे पदमूल्य नेहमीप्रमाणे त्याच पदस्थितीत जाते ज्या पदस्थितीत ते पदमूल्य समान नसताना गेले असते.

३.३ प्रतिगमन रेषा

दिलेल्या आकडेवारीमध्ये किंवा साधनसामुग्रीमध्ये दोन चले किंवा घटक असतील व ते घटक एकमेकांशी निगडीत असतील तर त्यास आपण सहसंबंध म्हणतो. सहसंबंध असलेल्या दोन चलापैकी एका चलातील माहितीवरुन दुसऱ्या चलासंबंधी अंदाज करणे मूल्य निश्चित करणे म्हणजेच प्रतिगमन होय. हा एका सहसंबंधीत चलाच्या माहितीवरुन दुसऱ्या चलाच्या किंमतीचा अंदाज काढण्यासाठी आलेख कागदावर ज्या रेषा काढल्या जातात त्याला प्रतिगमन रेषा असे म्हणतात. या रेषा काढल्यानंतर एका चलाचा निर्देश करणाऱ्या रेषाच्या प्रमाणात दुसरी रेषा वाढविल्यास आपणास पाहिजे असलेले मूल्य उपलब्ध होते. प्रतिगमन या शब्दाचा प्रथम उपयोग फान्सीस गरलीस यांनी १८७७ साली केला. त्याने प्रथमत: मुलगा व वडील यांच्या उंचीतील संबंध स्पष्ट करण्यासाठी

प्रतिगमनाचा वापर केला. त्याच्यानंतर संख्याशास्त्रामध्ये, अर्थशास्त्रामध्ये व सध्या विविध क्षेत्रामध्ये प्रतिगमनाचा वापर होत आहे. प्रतिगमन रेषांचा उपयोग अर्थशास्त्र विविध व्यवसाय, विविध समाजशास्त्रामध्ये मोठ्याप्रमाणात होतो. समजा दोन चले अनुक्रमे आणि y असतील तर त्यांच्या पासून दोन प्रतिगमन रेषा काढाव्या लागतात. त्यांना x on y आणि y on x असे म्हणतात. याच्यासाठी दोन समीकरणे तयार करणे आवश्यक असते. या दोन प्रतिगमन रेषावरुन त्या दोन चलातील असलेला + धन किंवा ऋण सहसंबंध अचूक स्पष्ट करता येतो. म्हणूनच या रेषांचा उपयोग मोठ्या प्रमाणात होतो. दिलेल्या वितरणामध्ये दोन किंवा अनेक चलामध्ये सहसंबंध असेल व तो सहसंबंध आलेख कागदावर वक्राच्या सहाय्याने दाखविल्यानंतर त्याला प्रतिगमन वक्र असे म्हणतात. परंतु हा वक्र जर सरळ रेषला असेल तर तया रेषेला प्रतिगमन रेषा असे म्हणतात. जर दोन प्रतिगमन रेषा एकमेकांवर अवलंबून असतील तर त्यांच्यामध्ये सहसंबंध असतो.

जर दोन किंवा अधिक प्रतिगमन रेषा एकमेकांच्या जवळ असतील तर त्यांच्यामधील सहसंबंध जास्त असतो.

आलेख -

दोन किंवा अधिक प्रतिगमन रेषा आलेख कागदावर एकमेकींच्या दूर असतील तर त्या घटकामधील किंवा चलामधील सहसंबंध कमी असतो.

आलेख -

जर दोन चलाच्या प्रतिगमन रेषा एकमेकीस ज्या ठिकाणी छेदत असतील ती छेदून बिंदू त्या दोन चलाची सरासरी असते.

आलेख -

प्रतिगमन सुत्र -

दोन चलामधील असलेल्या एका चलामधील माहितीवरुन दुसऱ्या चलातील अंदाज करण्यासाठी किंवा मुल्य निश्चीत करण्यासाठी दोन रेषांचा उपयोग होतो. यासाठी दोन प्रतिगमन सुत्रांची आवश्यकता असते.

उदा. x , y ही दोन चले असतील तर x या चलावरुन y बदलत असेल तर त्यास x on y आणि y चलावरुन x किंमत बदलत असेल तर y on x असे म्हणतात.

Regression equation of y on x

$$y = a + bx$$

$$\sum y = Na + b\sum x \qquad a \text{ and } b = \text{constant}$$

$$\sum xy = a \times b\sum x2$$

x on y

$$x = a + b$$

$$\sum x = Na + b\sum y$$

$$\sum xy = a\sum y + b\sum y2$$

३.४ गृहीत तत्त्व चाचण्या

गृहीत तत्व चाचण्यांचे प्रकार - गृहीत तत्वांच्या चाचण्या सामान्यपणे दोन प्रकारांत विभागल्या जातात.

१) परिमाणरहित व

२) परिमाणात्मक चाचण्या

परिमाणरहित चाचण्या नमुनावितरणांची सैद्धांतिक वितरणांशी तुलना केली जाते किंवा दोन वेगळ्या वितरणांची एकमेकांशी तुलना केली जाते तेव्हा त्या चाचणीस परिमाणरहित चाचणी असे म्हटले जाते. समष्टीतील निरीक्षणमूल्यांच्या वितरणाबाबत, समष्टीच्या अमर्याद आकारामुळे जेव्हा काहीच कल्पना करता येत नाही. तेव्हा त्या चाचण्या उपयुक्त ठरतात. जेव्हा वितरणे एकशिखरी किंवा बहुशिखरी असतात. तेव्हाही या चाचण्यांचा उपयोग होतो. बऱ्याच वेळा नमुन्यातील निरीक्षणमुल्ये ही मोजदाद केलेल्या स्वरुपात असली तरी परिमाणरहित चाचण्यांचा वापर केला जातो. वाय स्क्वेअर के एस या प्रमुखा परिमाणरहित चाचण्या आहेत.

X^2 **चाचणी :** अपेक्षित वितरण व प्रत्यक्ष वितरण यांची तुलना करणाऱ्या या चाचणीस 'एकवाक्यतेच्या योग्यतेची चाचणी' म्हटले जाते. यात प्रामुख्याने निव्वळ वारंवारता या स्वरुपात निरीक्षणे वापरली जातात. एक व दोन किंवा जास्त नमुन्यांसाठी ही पद्धत कशी वापरावी ते पुढे दिली आहे.

$K-S$ **चाचणी :** दोन वितरणांची तुलना करण्यासाठी व त्यातील एकवाक्यता तपासण्यासाठी कोलमोग्रोव्ह स्मिरनॉव्ह यांनी मांडलेली चाचणी कशी वापरावी तेही पुढे दिले आहे.

$X^2 Test$ **(एक नमुना पद्धती) :** नवीन महामार्गाची निर्मिती करताना त्या क्षेत्रातील तोडलेल्या झाडांची जी संख्या आढळली त्यांची माहिती पुढील तक्यात दिली आहे. तोडलेल्या झाडांच्या संख्येचे हे वितरण, अपेक्षित वितरणापेक्षा फारसे भिन्न नाही हे गृहीत तत्व विश्वासार्हतेच्या ०.००५ व ०.००१ या पातळ्यांवर 'काय स्क्वेअर' या चाचणीचा वापर करुन ग्राह्य अथवा त्याज्य ठरवा.

नवीन महामार्गाचा प्रदेश -	अ	ब	क	ड	इ	फ	ग	ह	ए	ज
तोडलेल्या झाडांची संख्या -	१२	१७	१९	११	२४	१८	९	१४	२६	२३

$x^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$ हे सूत्र वापरण्यासाठी पुढील आकडेवारी तयार करणे आवश्यक आहे.

चिखलयुक्त तुकड्यांची अपेक्षित संख्या ही तुकड्यांच्या प्रत्यक्ष संख्येची सरासरी असेल म्हणजेच ती $\frac{\sum x}{8}$ या सूत्राप्रमाणे $\frac{173}{10} = 17.3$ असेल.

प्रत्यक्ष संख्या (O)	अपेक्षित संख्या (O)	O-E	(O-E)2	$\frac{(O-E)2}{E}$
१२	१७.३	-५.३	२३.०९	१.६२
१७	१७.३	-०.३	०.०९	०.००५
१९	१७.३	१.७	२.८९	०.१७
११	१७.३	-६.३	३९.६९	२.२९
२४	१७.३	६.७	४३.८४	२.५९
१८	१७.३	०.९	०.४९	०.२८
९	१७.३	-३.३	६३.८९	३.९८
१४	१७.३	-३.३	१०.८९	०.६३
२६	१७.३	३.७	७५.६९	३.३८
२३	१७.३	५.७	३२.४९	१.८७
				१७.५७

यावरुन चाचणीची मांडणी पुढीलप्रमाणे केली जाते.

H_o - शून्यवत गृहीतत्व : चिखलयुक्त गाळाच्या तुकडयांचे प्रत्यक्ष वितरण व त्याचे अपेक्षित वितरण यांत लक्षणीय फरक नाही.

$L.S.$ विश्वासार्हतेच्या पातळ्या - ०.०५/०.०१

$D.F.$ विमुक्त संख्यामापन : $n-1=10-1=9$

$X^2(cal): x^2$ चे निष्कर्षमूल्य : १७.५७

$X^2(tab):x^2$ चे कोष्टकमुल्य : ०.०५ पातळीसाठी १६.९१९ व ०.०१ पातळीसाठी २१.६६६ (कोष्टकमूल्यासाठी परिशिष्ट पाहावे)

निष्कर्ष : X^2 चे मूल्य ०.०५ पातळीसाठी कोष्टकमूल्यापेक्षा जास्त असल्यामुळे या पातळीवर गृहीततत्व त्याज्य तर ०.०१ पातळीवर ग्राह्य ठरेल.

कोष्टक किंवा दुहेरी वर्गीकरण :

X^2 test : Continency Table जेव्हा निरीक्षणाचे वर्गीकरण हे दोन घटकांच्या सहायाने केले जाते. तेव्हा निरीक्षणमूल्यांचे कोष्टकस्वरुपात सादरीकरण करुन, निरीक्षणमूल्यांचे वितरण व अपेक्षित मूल्यांचे वितरण यांची तुलना केली जाते.

पुढील उदाहरणात विविध प्रदेशात आढळणाऱ्या काही पीकप्रकाराचे वितरण दाखविले आहे.

पीकप्रकार	महाराष्ट्र	पंजाब	जम्मू काश्मिर	एकूण
अ	३०	१०	१०	५०
ब	५०	३०	२०	१००
क	५०	६०	४०	१५०
ड	१०	२०	२०	५०
एकूण	१४०	१२०	९०	३५०

शेवटच्या स्तंभात व शेवटच्या ओळीत याची एकूण बेरीज करुन घ्यावी. या बेरजांच्या आधारे व पुढील सूत्राचा वापर करुन अपेक्षित वितरणाचे कोष्टक मिळवावे.

$$Expected\ Frequency = \frac{Row\ Total \times Column\ Total}{Grand\ Total}$$

$$\text{अपेक्षित मूल्य} = \frac{\textit{ओळीतील बेरीज} \times \textit{स्तंभातील बेरीज}}{\text{एकूण बेरीज}}$$

$$\left(\text{उदाहरणार्थ : ३० या पहिल्या संख्येचे अपेक्षित मूल्य} = \frac{५० \times १४०}{३५०} = २०\right)$$

याप्रमाणे प्रत्येक संख्येचे मूल्य काढावे व पुढील प्रकारचे कोष्टक तयार करावे.

पीकप्रकार	महाराष्ट्र	पंजाब	जम्मू काश्मिर	एकूण
अ	३०	१०	१०	५०
ब	५०	३०	२०	१००
क	५०	६०	४०	१५०
ड	१०	२०	२०	५०
एकूण	१४०	१२०	९०	३५०

अपेक्षित वितरण व प्रत्यक्ष वितरण यात महत्त्वपूर्ण फरक आहे किंवा नाही हे गृहीततत्व तपासण्यासाठी चे मूल्य पुढीलप्रमाणे ठरविले जाईल.

प्रत्यक्ष संख्या (O)	अपेक्षित संख्या (O)	O-E	(O-E)2	$\frac{(O-E)2}{E}$
३०	२०	१०.०	१००.००	५.००
५०	४०	१०.०	१००.००	२.५०
५०	६०	-१०.०	१००.००	१.६७
१०	२०	-१०.०	१००.००	५.००
१०	१७.१	-७.१	५०.४१	२.९४
३०	३३.३	-३.३	१३.४९	०.५४
६०	५१.४	३.६	७३.९६	१.४४
२०	१७.१	२.९	३.४१	०.४९
१०	१२.९	-२.९	३२.४९	०.६५
२०	२५.७	-५.७	१.९६	१.२६
४०	३३.६	१.४	५०.४१	०.०५
२०	१२.९	७.१		३.९०
				२५.४६

यावरुन चाचणीची मांडणी पुढीलप्रमाणे केली जाते.

H_o - शून्यवत गृहीतत्व : पीप्रकार व त्यांचे प्रदेश यासंबंधीचे प्रत्यक्ष वितरण अपेक्षित वितरणापेक्षा फारसे वेगळे नाही.

$L.S.$ विश्वासार्हतेच्या पातळ्या - ०.०५/०.०१

$D.F.$ विमुक्त संख्यामापन : दुहसेरी वर्गीकरण असताना हे संख्यामान : $(r-1)(c-1)$ म्हणजेच (ओळींची संख्या -१) (स्तंभांची संख्या -१) एवढे असेल.

$X^2(cal): x^2$ चे निष्कर्षमूल्य : २५.४६

$X^2(tab): x^2$ चे कोष्टकमुल्य : ०.०५ पातळीसाठी १२.५९२ व ०.०१ पातळीसाठी - १६.८१२ (कोष्टकमूल्यासाठी परिशिष्ट पाहावे)

निष्कर्ष : चे मूल्य ०.०५ पातळीसाठी कोष्टकमूल्यापेक्षा जास्त असल्यामुळे या पातळीवर गृहीततत्व त्याज्य तर ०.०१ पातळीवर ग्राह्य ठरेल.

❖❖❖❖

४

नमुना

घटक रचना :

४.० उद्दिष्टे

- भूगोल मध्ये नमुना आणि नमुना डिझाइन समजून घेणे
- बिंदू नमुना - पद्धतशीर आणि यादृच्छिक चा उपयोग
- रेषा नमुना - पद्धतशीर आणि यादृच्छिक
- क्षेत्र नमुना - पद्धतशीर आणि यादृच्छिक

४.१ प्रस्तावना

या प्रकरणात, आपण भूगोलातील बद्दल जाणून नमुनाबद्दल माहिती घेणार आहोत, नमुना म्हणजे काय हे जाणून घेतल्यानंतर आपण बिंदू, रेषा आणि क्षेत्राचे नमुने घेण्याच्या विविध प्रकारांबद्दल शिकू. तसेच आपण पद्धतशीर आणि यादृच्छिक नमुना शिकू.

जेव्हा तुम्ही कोणत्याही प्रकारची माहिती गोळा करता, विशेषत: परिमाणात्मक माहिती , मग तो निरीक्षणात्मक असो, सर्वेक्षणांद्वारे किंवा दुय्यम माहिती मधून, तुम्हाला कोणता माहिती गोळा करायचा आणि कोणाकडून हे ठरवावे लागेल. याला नमुना म्हणतात.

तुमचा नमुना निवडण्याचे आणि ते तुम्हाला विश्वसनीय आणि विश्वासार्ह परिणाम देईल याची खात्री करण्यासाठी विविध मार्ग आहेत.

४.२ भूगोल मध्ये नमुना आणि नमुना डिझाइन

नमुना म्हणजे काय?

• संपूर्ण लोकसंख्येची तपासणी करण्यासाठी शॉर्टकट पद्धत

• माहिती संपूर्ण पालक लोकसंख्येच्या एका छोट्या भागावर किंवा नमुना फ्रेमवर गोळा केला जातो आणि संपूर्ण चित्र कसे आहे याची माहिती देण्यासाठी वापरला जातो.

नमुना का?

प्रत्यक्षात फक्त पुरेसे नाही; वेळ, ऊर्जा, पैसा, श्रम/माणूस शक्ती, उपकरणे, पालक लोकसंख्या किंवा संपूर्ण सॅम्पलिंग फ्रेममधील प्रत्येक आयटम किंवा साइट मोजण्यासाठी योग्य साइटवर प्रवेश.

म्हणून एक प्रतिनिधी मिळविण्यासाठी योग्य नमुना धोरण अवलंबले जाते आणि संपूर्ण नमुना सांख्यिकीयदृष्ट्या वैध आहे.

नमुना विचार

- मोठ्या नमुन्याचे आकार संपूर्ण गोष्टींचे अधिक अचूक प्रतिनिधित्व करतात
- निवडलेला नमुना आकार सांख्यिकीयदृष्ट्या वैध प्रतिनिधित्व मिळवणे आणि वेळ, ऊर्जा, पैसा, श्रम, उपकरणे आणि उपलब्ध प्रवेश यांच्यातील संतुलन आहे.
- किमान पक्षपातीपणासह तयार केलेली नमुना धोरण सर्वात सांख्यिकीयदृष्ट्या वैध आहे
- बहुतेक दृष्टीकोन गृहीत धरतात की पालक लोकसंख्येचे सामान्य वितरण असते जेथे बहुतेक वस्तू किंवा व्यक्ती सरासरीच्या जवळ असतात, काही टोकांसह
- 95% संभाव्यता किंवा आत्मविश्वास पातळी सामान्यतः गृहीत धरली जाते, उदाहरणार्थ 95% वस्तू किंवा व्यक्ती सरासरीपासून अधिक किंवा वजा दोन मानक विचलनांमध्ये असतील
- याचा अर्थ असाही होतो की याच्या बाहेर पाच टक्के असू शकतात - सॅम्पलिंग, कितीही चांगले असले तरीही केवळ अगदी जवळचा अंदाज असल्याचा दावा केला जाऊ शकतो.

नमुना तंत्र

नमुना तंत्राचे दोन मुख्य प्रकार आहेत :

• यादृच्छिक

• पद्धतशीर

या प्रकारांमध्ये, तुम्ही नंतर निर्णय घेऊ शकता; बिंदू, रेखा, क्षेत्र पद्धत.

१. यादृच्छिक नमुना

• सर्व सॅम्पलिंग तंत्रांमध्ये किमान पक्षपाती, कोणतीही सब्जेक्टिव्हिटी नाही - एकूण लोकसंख्येतील प्रत्येक सदस्याला निवडले जाण्याची समान संधी आहे

• यादृच्छिक संख्या सारण्या वापरून मिळवता येते

• मायक्रोसॉफ्ट एक्सेलमध्ये यादृच्छिक संख्या तयार करण्याचे कार्य आहे

• =RAND()

ते सेलमध्ये टाइप करा आणि ते त्या सेलमध्ये यादृच्छिक संख्या तयार करेल. सेलच्या निवडीमध्ये सूत्र कॉपी करा आणि ते यादृच्छिक संख्या तयार करेल.

तुम्हाला हवी असलेली श्रेणी मिळवण्यासाठी तुम्ही फॉर्म्युला सुधारू शकता, उदाहरणार्थ तुम्हाला एक ते 250 पर्यंत यादृच्छिक आकड्या हव्या असल्यास, तुम्ही खालील फॉर्म्युला एंटर करू शकता:

• =INT(250*RAND())+1

जेथे INT दशांश नंतर अंक काढून टाकते, 250* कव्हर करण्यासाठी श्रेणी तयार करते आणि +1 श्रेणीतील सर्वात कमी संख्या सेट करते.

वापरून जोडलेले क्रमांक देखील मिळू शकतात;

• =INT(9000*RAND())+1000

हे नंतर ग्रिड कोऑर्डिनेट्स, मीटर आणि सेंटीमीटर सॅम्पलिंग स्टेशन्स म्हणून किंवा कोणत्याही व्यवहार्य मार्गाने वापरले जाऊ शकतात.

• =RAND()

कार्यपद्धती

१. यादृच्छिक बिंदू नमुना

• अभ्यास क्षेत्राच्या नकाशावर एक ग्रिड काढला जातो

• यादृच्छिक संख्या सारण्यांचा वापर गुणांसाठी निर्देशांक/ग्रिड संदर्भ प्राप्त करण्यासाठी केला जातो

• नमुना शक्य तितक्या या बिंदूंच्या अगदी जवळ केले जाते

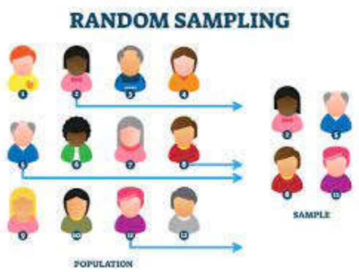
२. यादृच्छिक रेषा नमुना

• यादृच्छिक संख्या सारणी वापरून समन्वय किंवा ग्रिड संदर्भांच्या जोडी मिळवल्या जातात आणि अभ्यास क्षेत्राच्या नकाशावर चिन्हांकित केल्या जातात.

• नमुन्यासाठी रेषा तयार करण्यासाठी हे जोडले जातात

३. यादृच्छिक क्षेत्राचे नमुने घेणे

• यादृच्छिक संख्या सारण्या निर्देशांक किंवा ग्रिड संदर्भ तयार करतात ज्याचा वापर चौथर्यांच्या तळाशी (दक्षिण पश्चिम) कोपरा चिन्हांकित करण्यासाठी केला जातो



यादृच्छिक नमुना फायदे आणि तोटे

फायदे:

• मोठ्या नमुना लोकसंख्येसह वापरले जाऊ शकते

• पक्षपात टाळतो

तोटे:

• एकूण पालक लोकसंख्येचे किंवा क्षेत्राचे खराब प्रतिनिधित्व होऊ शकते जर मोठ्या क्षेत्रांना यादृच्छिक संख्येने व्युत्पन्न केले नाही. जर अभ्यासाचे क्षेत्र खूप मोठे असेल तर हे वाईट होते

• अभ्यास क्षेत्राच्या काही भागांमध्ये उपलब्ध वेळेच्या आणि प्रवेशाच्या दृष्टीने

व्यावहारिक मर्यादा असू शकतात

२. पद्धतशीर नमुना

- नमुने पद्धतशीर किंवा नियमित पद्धतीने निवडले जातात.
- ते एका स्थानिक संदर्भात समान रीतीने/नियमितपणे वितरीत केले जातात, उदाहरणार्थ प्रत्येक दोन मीटर अंतरावर ट्रान्सेक्ट लाईन
- ते तात्पुरत्या संदर्भात समान/नियमित अंतराने असू शकतात, उदाहरणार्थ प्रत्येक अर्ध्या तासाने किंवा दिवसाच्या निर्धारित वेळी

• ते नियमितपणे क्रमांकित केले जाऊ शकतात, उदाहरणार्थ प्रत्येक 10 व्या घर किंवा व्यक्ती

कार्यपद्धती

१. पद्धतशीर बिंदू नमुना

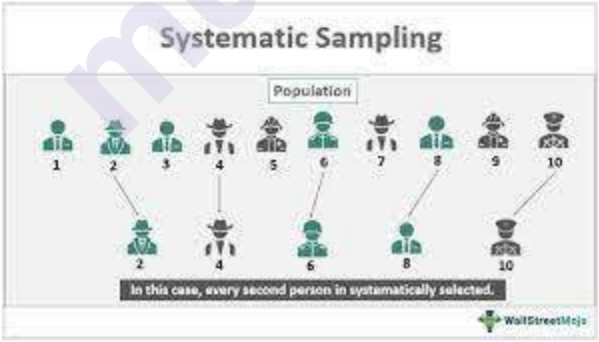
एक ग्रिड वापरला जाऊ शकतो आणि पॉइंट ग्रिड रेषांच्या छेदनबिंदूवर किंवा प्रत्येक ग्रिड स्क्वेअरच्या मध्यभागी असू शकतात. नमुने घेणे जवळच्या व्यवहार्य ठिकाणी केले जाते. ट्रान्सेक्ट लाईनच्या बाजूने, वनस्पती/गारगोटी डेटा संकलनासाठी सॅम्पलिंग पॉइंट्स पद्धतशीरपणे ओळखले जाऊ शकतात, उदाहरणार्थ प्रत्येक दोन मीटर किंवा प्रत्येक 10 व्या .

२. पद्धतशीर रेखा नमुना

नकाशावरील ग्रिडच्या पूर्वेकडील किंवा उत्तरेचा वापर ट्रान्सेक्ट रेषा ओळखण्यासाठी केला जाऊ शकतो. वैकल्पिकरित्या, समुद्रकिनाऱ्याच्या बाजूने असे ठरवले जाऊ शकते की समुद्रकिनाऱ्याच्या लांबीच्या बाजूने दर 20 मीटर अंतरावर समुद्रकिनाऱ्यावर एक आडकाठी केली जाईल.

३. पद्धतशीर क्षेत्र नमुना

नमुना घ्यायच्या असलेल्या ग्रिड स्क्वेअरचा 'नमुना' अभ्यास क्षेत्राचा नकाशा वापरून ओळखला जाऊ शकतो, उदाहरणार्थ प्रत्येक सेकंद/तिसरा ग्रिड स्क्वेअर खाली किंवा संपूर्ण क्षेत्रफळ - दक्षिण पश्चिम कोपरा नंतर चौकोनाचा कोपरा चिन्हांकित करेल. जोपर्यंत ते नियमित असतात तोपर्यंत नमुने कोणताही आकार किंवा दिशा असू शकतात.



पद्धतशीर नमुना फायदे आणि तोटे

फायदे:

• हे यादृच्छिक नमुनापेक्षा अधिक सरळ आहे

• ग्रिड वापरणे आवश्यक नाही, सॅम्पलिंग फक्त एकसमान अंतराने असणे आवश्यक आहे

• यादृच्छिक नमुने वापरण्यापेक्षा अभ्यास क्षेत्राचे चांगले कव्हरेज अधिक सहजपणे प्राप्त केले जाऊ शकते

नमुना

तोटे:

• हे अधिक पक्षपाती आहे, कारण सर्व सदस्यांना किंवा गुणांना निवडले जाण्याची समान संधी नसते

• त्यामुळे एखाद्या विशिष्ट पॅटर्नचे प्रतिनिधीत्व अधिक किंवा कमी होऊ शकते

❖❖❖❖

५

भूगोलातील क्षेत्रीय कार्य - कोणत्याही एका ठिकाणाच्या/गावाच्या

या प्रकरणामध्ये आपण भौगोलिक अहवाल लेखन शिकू. भौगोलिक अहवाल कसा लिहायचा,कोणत्या पद्धती वापरल्या जातात आणि भौगोलिक अहवाल लेखनासाठी कोणते तंत्र उपयुक्त आहे हे आम्हाला समजते.

भौगोलिक क्षेत्र अहवाल:

शेतात केलेल्या कामाचा अहवाल लिहिणे हे फील्डवर्कचे दस्तऐवजीकरण आहे. हे कार्य पूर्ण केलेल्या विद्यार्थ्यांद्वारे कामाचे पद्धतशीर पुनरावलोकन करण्यास मदत करते आणि भविष्यातील क्षेत्रीय अभ्यासासाठी एक संदर्भ आहे. क्षेत्रीय अहवाल लहान, स्पष्ट आणि सहाय्यक डेटा, नकाशे, स्केचेस, छायाचित्रे इत्यादीसह माहितीपूर्ण असले पाहिजेत.

अहवाल लेखनात अनेक टप्पे आहेत. ते आहेत:

शीर्षक:

तपासाचा विषय ओळखा जो फील्ड वर्कचा उद्देश आहे. हे कामाचे शीर्षक आहे आणि ते अहवालाच्या शीर्षस्थानी ठळक अक्षरात लिहावे लागेल.

परिचय:

प्रत्येक अहवालाची सुरुवात अभ्यासाखालील विषयाच्या संक्षिप्त परिचयाने करावी. भूगोलाच्या कोणत्या भागाशी त्याचा संबंध आहे हे स्पष्ट केले पाहिजे. उदाहरणार्थ, जर अभ्यास एखाद्या प्रवाहाविषयी असेल, तर तो भौतिक भूगोलाच्या शाखेत येतो, विशेषत: जिओमॉर्फोलॉजी - डिन्युडेशनचा एक्सोजेनेटिक एजंट. फील्डवर्कसाठी नियोजित केलेली कालमर्यादा सविस्तरपणे सांगता येईल. फील्ड वर्क एक दिवसापेक्षा जास्त कालावधीसाठी वाढवत असल्यास, स्पष्ट वेळापत्रक दिले पाहिजे.

अभ्यासाची गरज:

क्षेत्राचे काम का हाती घेतले याचे कारण सांगता येईल. हे फील्ड वर्कची गरज स्पष्ट करते.

अभ्यास क्षेत्र:

अभ्यास क्षेत्राचे तपशील येथे स्पष्ट केले आहेत - अभ्यास क्षेत्राचे परिपूर्ण किंवा भौगोलिक स्थान, अभ्यास क्षेत्राची निवड आणि क्षेत्राचे भौतिकशास्त्र यापासून सुरुवात. अभ्यास क्षेत्राचे इतर ज्ञात भौतिक आणि सांस्कृतिक तपशील येथे नमूद केले जाऊ शकतात. नकाशाची एक प्रत, उपग्रह प्रतिमा इत्यादींचा समावेश येथे केला जाऊ शकतो.

वापरलेली पद्धत:

क्षेत्रीय कार्य करण्यासाठी वापरल्या जाणाऱ्या पद्धतींचा येथे उल्लेख करावा लागेल. माहिती गोळा करण्याची पद्धत अभ्यासाच्या प्रकारानुसार बदलते. हे निरीक्षण, तपासणी, मोजमाप याद्वारे असू शकते; प्राथमिक आणि दुय्यम स्त्रोतांकडून डेटा संकलन; फील्ड स्केचेस, ऑडिओ-व्हिडिओ रेकॉर्डिंग आणि छायाचित्रे आणि GNSS सर्वेक्षण.

डेटा विश्लेषण:

फिल्डवर्कद्वारे गोळा केलेला डेटा सोप्या पद्धतीने विश्लेषणासाठी सादर केला पाहिजे. डेटाचे प्रतिनिधित्व करण्याची पद्धत गोळा केलेल्या डेटाच्या पद्धतीनुसार असावी. उदाहरण:

1. जर डेटा संकलनामध्ये निरीक्षण पद्धत वापरली गेली असेल तर डेटा छायाचित्रे किंवा फील्ड स्केच म्हणून दर्शविला जाऊ शकतो.

2. सर्वेक्षणांद्वारे डेटा संकलित केल्यास, तो योजना किंवा नकाशा म्हणून दर्शविला जाऊ शकतो.

3. दुय्यम स्त्रोतांकडून गोळा केलेला डेटा सारण्या, आलेख, आकृत्या किंवा तक्ते म्हणून सादर केला जाऊ शकतो.

4. GNSS सर्वेक्षणाद्वारे गोळा केलेला माहिती नाकाश केला जाऊ शकतो.

विविध स्वरूपात दर्शविलेल्या डेटाला सहज ओळखण्यासाठी आणि समजण्यासाठी सुबकपणे लेबल आणि अनुक्रमित केले जावे. पोस्ट फील्ड वर्क दरम्यान तयार केलेली छायाचित्रे, आकृत्या, तक्ते, नकाशे इत्यादींची क्रमवार मांडणी करावी लागते जेणेकरून ते अभ्यासाच्या उद्देशाचे उत्तर देऊ शकतील आणि शेतात केलेल्या कामाच्या अहवालात अधिक अर्थ आणि मूल्य जोडू शकतील. .

निष्कर्ष:

निष्कर्ष क्षेत्रीय कार्याचा सारांश देतो - उद्दिष्ट, परिणाम किंवा निष्कर्ष आणि ते विद्यमान ज्ञानाशी कसे संबंधित आहे आणि या क्षेत्रीय कार्याद्वारे नवीन ज्ञानाची भर घालते. समारोपात फील्डवर्कने वर्गात मिळवलेले सैद्धांतिक ज्ञान कसे वाढवले आहे ते मांडावे लागेल.

खाली दिलेला तक्ता भौतिक भूगोल अंतर्गत काही केस स्टडीसाठी फील्ड रिपोर्ट तयार करण्याच्या काही पायऱ्या देतो.

Steps involved in preparation of field report for field studies in physical geography

Sub topics	River	Hillock	Forest	Coast
Data Collection	Specify the method of data collection as primary / secondary source.	Specify the method of data collection as primary / secondary.	Specify the method of data collection as primary / secondary.	Specify the method of data collection as primary / secondary source.
Data Representation	Represent the data in any cartographic form such as sketch / chart / graph / map.	Represent the data in any cartographic form such as chart / graph / map / sketch.	Represent the data in any cartographic form such as chart / graph / map / sketch.	Represent the data in any cartographic form such as sketch / chart / graph / map.
Findings	From the representation list your findings.	From the representation list your findings.	From the representation list your findings.	From the representation list your findings.
Report - Writing Narrate the full work in simple language and submit.	Narrate the full work in simple language and submit.	Narrate the full work in simple language and submit.	Narrate the full work in simple language and submit.	
References	The report should have the details of references related to the study and source of data used for the study.	The report should have the details of references related to the study and source of data used for the study.	The report should have the details of references related to the study and source of data used for the study.	The report should have the details of references related to the study and source of data used for the study.

भूगोलातील क्षेत्रीय कार्य - कोणत्याही एका ठिकाणाच्या/गावाच्या

Steps involved in preparation of field report for field studies in physical geography

Sub topics	River	Hillock	Forest	Coast
Aim	To understand river as a natural resource.	To understand hillock as natural resource.	To understand forest as natural resource.	To understand coast as a natural resource.
Learning Objectives	➢ Identify the stage of river. ➢ Trace the source of the river. ➢ Assess the command area of the river. ➢ Analyse river as an ecosystem.	➢ Identify the geological history of the hillock. ➢ Determine the height of the hillock by simple measurement ➢ Draw the cross sections of it. ➢ Co-relate the vegetation with slope, supply of water and climate of the place.	➢ Identify the type of forest. ➢ List the role of forest in the life of the people. ➢ Indentify fauna and flora and their trophic level.	➢ Identify the type of coast and coastal features. ➢ List the role of coast in the life of the people. ➢ Indentify fauna and flora and their trophic level.
Study Area	Write about the river chosen, location of the village or town which is selected as study area.	Write about the hillock chosen, the village or town where the hill is located in the study area.	Write about the forest chosen, location of the village or town which is located in the study area.	Write about the coastal tract chosen and location of the village or town which is located in the tract.
Methodology	➢ With the theoretical knowledge gained to indentify the stages of a river. ➢ Trace the source of the river from published sources. ➢ Gather information about the area served by the river in terms of supplying water for irrigation, drinking purpose, industrial purpose and recreation. ➢ Observe and record the fauna and flora along the river side. ➢ Take photo/make field sketches for all your observations.	➢ Observe the agents of erosion responsible for the formation of the hillock. ➢ Using clinometer measure the height. ➢ Draw a sketch of the hillock. ➢ Collection information on cultural importance of the hillock religious / cave / paintings / resort. ➢ Study the varieties of biodiversity and correlate with the climate.	➢ Gather information about the type of trees present in the forest. ➢ Interact with local people and collect information about the resources available in terms of timber / fuel / herb / fruits and nuts / any other. ➢ Construct a trophic level diagram for the forest with the information your collected.	➢ Gather information about the area served by the coast in terms of supplying sea food, salt, power production, industrial purpose and recreation. ➢ Gather information About the type of fauna and flora along the coast and coastal water. ➢ Indentify the interaction of people with the resources available in terms of fuel/ food/fish weed /any other. ➢ Construct topic level diagram for the coastal ecosystem ➢ With your observation and gathered information, collect the historical facts about the coastal belt.
Limitation	Specify your limitations in terms of fund / time / study area selected.	Specify your limitations in terms of fund / time / study area selected.	Specify your limitations in terms of fund / time / study area selected.	Specify your limitation in terms of fund / time / study area selected.

(Continued)

सराव

1. तुमच्या शाळेच्या मैदानाचे मोजमाप करा आणि त्याचा आराखडा तयार करा.

2. जमीन, पाण्याच्या प्रवाहाची दिशा, परिसरातील झाडे आणि इतर वनस्पतींचा अभ्यास करण्यासाठी नदीच्या रेषेच्या क्षेत्रामध्ये फील्ड ट्रिपची व्यवस्था करा. फील्ड स्केच बनवा आणि एक छोटा रिपोर्ट तयार करा.

3. सकाळी 11.00 आणि 4.00 वाजता दररोजचे तापमान मोजा आणि कमाल आणि किमान तापमानाची मासिक सरासरी शोधा.

4. त्या भागातील उतार, उतार, झाडे आणि इतर वनस्पतींचा अभ्यास करण्यासाठी जवळच्या डोंगराळ भागात फील्ड भेटीची योजना करा. त्याचे फील्ड स्केच तयार करा आणि एक छोटा अहवाल लिहा.

❖❖❖❖

QUESTION PAPER PATTERN (SEM - VI)
MARKS:-100 TIME:4 HRS

:

1. All questions are compulsory.
2. Figures to the right indicate marks to a sub-question.
3. Use of map stencils and simple calculator is allowed.

Q.1	Unit-I	16Marks
Q.2	Unit–II	16Marks
Q.3	Unit–III	16Marks
Q.4	Unit–IV	16Marks
Q.5	Unit–V	16Marks
Q.6	JournalandViva	20Marks

❖❖❖❖