13. An individual purchases quantities a, b, c of three different commodities whose prices are p, q, r respectively. The consumer's exogenous income given is M where M > 2p. The utility function is defined as U(a, b, c) = a + ln(bc).

(a) Using the Lagrangean method, find the consumer's demand for each good as function of prices and income. (4)

(b) Show that the ratio between marginal utility of a commodity and its price per unit must be same for all the commodities. (3)

(c) Show that the expenditure on second and third good are always equal. (3)

एक व्यक्ति तीन अलग-अलग वस्तुओं की a, b, c मात्रा खरीदता है जिनकी कीमतें क्रमशः p, q, r हैं। उपभोक्ता की बहिर्जात आय M है जो M > 2p है। उपयोगिता फलन को U(a, b, c) = a + ln(bc) के रूप में परिभाषित किया गया है।

(क) लैग्रेंजन विधि का उपयोग करके, कीमतों और आय फलन के रूप में प्रत्येक वस्तु के लिए उपभोक्ता मांग ज्ञात कीजिए।

(ख) दर्शाएं कि किसी वस्तु की सीमांत उपयोगिता और प्रति इकाई उसकी कीमत के बीच का अनुपात सभी वस्तुओं के लिए समान होना चाहिए।

(ग) दर्शाएं कि दूसरी और तीसरी वस्तु पर व्यय हमेशा बराबर होता है।

[This question paper contains 16 printed pages.]

Your Roll No.....

05.01.2024(M)

Sr. No. of Question Paper : 640 **G**

Unique Paper Code : 2272102303

Name of the Paper : Advanced Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : **B.A. (H) Economics**

Semester : III

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Answers may be written either in English or in Hindi but the same medium should be used throughout the paper.
3. There are **three** sections in this question paper. Number of questions to be attempted from each section is given at the beginning of each section.
4. Each question carries equal marks.

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।
3. इस प्रश्न पत्र में तीन खंड हैं । प्रत्येक खंड से हल किए जाने वाले प्रश्नों की संख्या प्रत्येक खंड की शुरुआत में दी गई है ।
4. प्रत्येक प्रश्न के अंक समान हैं ।

SECTION A (खंड क)

(Attempt any 4 questions out of 6)

(6 में से किन्हीं 5 प्रश्नों का उत्तर दीजिए ।)

1. (a) Let the rate of growth of output is given by the function : $Q(t) = 12t^{1/3}$. If $Q(0) = 20$, find the time path of output level. Also, find the total production during the initial three years. (5)

(b) Find the area of the region between the curves $y_1 = 3x^2 - 6x + 3$ and $y_2 = -2x^2 + 1$ within the interval [0,2],. (5)

(c) Find an expression for the expenditure function.

$$E^* = E(P_x, P_y, U^*)$$ (2)

(d) Show that if the problem changes to

Min $P_x x + P_y y$ subject to $x(y+2) = U^*$

Show that x and y that solve the minimisation problem are equal to partial derivatives of the expenditure function. (3)

लागत फलन $U(x,y) = x(y+2)$ वाले उपभोक्ता पर विचार कीजिए, जो B की बजट बाधा से बचता है, और वस्तु x और वस्तु y की कीमतें क्रमशः P_x और P_y हैं।

(क) पहले क्रम की स्थितियों से, मांग फलन के लिए पद निर्धारित कीजिए।

(ख) अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन के लिए एक पद ज्ञात कीजिए।

$$U^* = U(P_x, P_y, B)$$

(ग) व्यय फलन के लिए एक पद ज्ञात कीजिए।

$$E^* = E(P_x, P_y, U^*)$$

(घ) दर्शाएं कि यदि प्रश्न निम्नानुसार परिवर्तित होता है

न्यूनतम $P_x x + P_y y$ के अधीन $x(y+2) = U^*$

दर्शाएं कि x और y जो शून्यीकरण समस्या को हल करते हैं, व्यय फलन के आंशिक डेरिवेटिव के बराबर हैं।

P.T.O.

फर्म को A की 300 इकाइयों और B की 500 इकाइयों के लिए ऑर्डर प्राप्त होता है। कारखानों 1, 2 और 3 को चलाने की प्रति घंटे लागत क्रमशः 10,000, 8,000 और 11,000 है।

(क) मान लीजिए कि y_1, y_2 और y_3 क्रमशः उन घंटों की संख्या को दर्शाते हैं जिनके लिए तीन कारकों का उपयोग किया जाता है। आदेश को पूरा करने की लागत को कम करने की रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या को लिखिए और इसका समाधान ढूंढिए।

(ख) भाग (क) की दोहरी समस्या लिखिए और समाधान ढूंढिए।

(ग) यदि कारखाने 1 में प्रति घंटे लागत में 100 की वृद्धि होती है, तो उत्पादन की न्यूनतम लागत कितनी बढ़ जाएगी?

12. Consider a consumer with the cost function $U(x,y) = x(y+2)$, who faces a budget constraint of B, and prices of good x and good y are P_x and P_y respectively.

(a) From the first-order conditions, determine the expression for the demand function. (3)

(b) Find an expression for the indirect utility function.

$$U^* = U(P_x, P_y, B) \quad (2)$$

(क) मान लीजिए कि आउटपुट की वृद्धि की दर फलन द्वारा: $Q(t) = 12t^{1/3}$. यदि $Q(0) = 20$ दी गई है, तो आउटपुट स्तर का समय पथ ज्ञात कीजिये। इसके अलावा, प्रारंभिक तीन वर्षों में कुल उत्पादन ज्ञात कीजिए।

(ख) अंतराल [0,2], के भीतर वक्र $y_1 = 3x^2 - 6x + 3$ और $y_2 = -2x^2 + 1$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

2. Solve the following difference equations. Also, determine whether the solution path is convergent or divergent and oscillatory or non-oscillatory.

(a) $x_t = -3x_{t-1} + 4,\ x_0 = 2$ (5)

(b) $x_t = 0.5x_{t-1} + 3,\ x_0 = 5$ (5)

निम्नलिखित अंतर समीकरणों को हल कीजिए। इसके अलावा, यह निर्धारित कीजिए कि समाधान पथ अभिसरण या विचलन और दोलनशील या गैर-दोलनशील है या नहीं।

(क) $x_t = -3x_{t-1} + 4,\ x_0 = 2$

(ख) $x_t = 0.5x_{t-1} + 3,\ x_0 = 5$

3. (a) The initial value of population of a country is 10^7. The birth rate is 0.04, death rate is 0.03 and 30,000

migrants arrive in the country every year. Write down the difference equation to represent this situation and solve it. Comment on its steady state. (6)

(b) A firm has current sales of Rs. 50,000 per month. The firm wants to embark upon a certain advertising campaign that will increase the sales by 2% every month (compounded continuously) over the period of 12 months of campaign. Find the total increase of sales because of the campaign. (4)

(क) एक देश की जनसंख्या का प्रारंभिक मान 10^7 है। जन्म दर 0.04 है, मृत्यु दर 0.03 है और 30,000 प्रवासी हर साल देश में आते हैं। इस स्थिति का प्रतिनिधित्व करने और इसे हल करने के लिए अंतर समीकरण लिखिए। इसकी स्थिर स्थिति पर टिप्पणी कीजिए।

(ख) किसी फर्म की वर्तमान बिक्री 50,000 रुपये प्रति माह है। फर्म एक निश्चित विज्ञापन अभियान शुरू करना चाहती है जो Campaign के 12 महीनों की अवधि में हर महीने बिक्री में 2% (लगातार संयोजित) की वृद्धि करेगी। अभियान के कारण बिक्री में कुल वृद्धि ज्ञात कीजिए।

The firm receives an order for 300 units of A and 500 units of B. The cost per hour of running factories 1,2 and 3 are respectively 10,000, 8,000 and 11,000.

(a) Let y_1, y_2 and y_3 respectively denote the number of hours for which the three factories are used. Write down the linear programming problem of minimising the costs of fulfilling the order and find its solution. (3)

(b) Write down the dual problem of part (a) and find the solution. (4)

(c) By how much will the minimum cost of production increase if the cost per hour in factory 1 increase by 100? (3)

एक फर्म दो वस्तुओं A और B का उत्पादन करती है। फर्म के तीन कारखाने हैं जो निम्नलिखित तालिका में दी गई प्रति घंटे की मात्रा में दोनों वस्तुओं का उत्पादन करते हैं

	Factory A	Factory B	Factory C
वस्तु A	10	20	20
वस्तु B	20	10	20

(क) अंतर समीकरण के समाधान निर्धारित कीजिए और समय पथ को चिह्नित कीजिए

$$2x_t + x_{t-1} + 2 = 0;\ x_0 = -1$$

(ख) निम्नलिखित अभिन्न को हल कीजिए :

$$\int_e^6 \left(\frac{1}{1+x} + x\right) dx$$

SECTION C (खंड ग)

(Attempt any 2 questions out of 3)

(3 में से किन्हीं 2 प्रश्नों का उत्तर दीजिए।)

11. A firm produces two commodities A and B. The firm has three factories that jointly produce both commodities in the amounts per hour given in the following table

	Factory A	Factory B	Factory C
Commodity A	10	20	20
Commodity B	20	10	20

4. (a) For a function $y = f(x)$ with the domain defined as $[0, a]$, where a is a positive constant. Find the area under the curve using Riemann integral. Give an approximated expression for the area. (6)

(b) For the following, evaluate $\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} \frac{1}{\sqrt{x^{4+1}}} dx$ and comment on the change in this integral value due to a unit change in t. (4)

(क) किसी फलन $y = f(x)$ के लिए $[0, a]$, के रूप में परिभाषित किया गया है, जहां a एक धनात्मक स्थिरांक है। रीमान समाकल का उपयोग करके वक्र के नीचे का क्षेत्र ज्ञात कीजिए। क्षेत्र के लिए एक अनुमानित पद दीजिए।

(ख) निम्नलिखित के लिए, $\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} \frac{1}{\sqrt{x^{4+1}}} dx$ t में इकाई परिवर्तन के कारण इस अभिन्न मूल्य में परिवर्तन का मूल्यांकन और टिप्पणी कीजिए।

5. What is the present value of a continuous revenue flow lasting for x years at

(a) A constant rate of R dollars per year and discounted at the rate of r per year? (5)

(b) Find the present value in case of constant cash flow of: (5)

(i) \$1450 per year, discounted at r = 5%, I = 2 years

(ii) \$2460 per year, discounted at r = 8%, t = 3 years

x वर्षों तक चलने वाले निरंतर राजस्व प्रवाह का वर्तमान मूल्य क्या है?

(क) प्रति वर्ष R डॉलर की स्थिर दर और r प्रति वर्ष की दर से छूट?

(ख) स्थिर नकदी प्रवाह के मामले में वर्तमान मान ज्ञात कीजिये:

(i) \$1450 प्रति वर्ष, छूट r = 5%, I = 2 वर्ष

(ii) \$2460 प्रति वर्ष, छूट r = 8%, t = 3 वर्ष

6. Use the graphical method to solve the following LP problem. (6)

(क) निम्नलिखित विभेदक समीकरण के लिए $\frac{dy}{dt} = 5y - 5$ जहाँ $y(0) = 5$ है। दर्शाएं कि $y_t = 2e^{st} + 1$ उपरोक्त विभेदक समीकरण का हल है और इसकी संतुलन स्थिति पर टिप्पणी कीजिए?

(ख) निम्नलिखित राष्ट्रीय आय लेखांकन प्रश्न के लिए:

$$Y_0 = 1500$$

$$I_0 = 50$$

और $C_0 = 90 + 0.10\, Y_{t-1}$

राष्ट्रीय आय लेखा समीकरण $Y = C + I$ द्वारा दिया गया है। समय t पर राष्ट्रीय आय (Y_t) का समय पथ ज्ञात कीजिए। इस समय पथ की स्थिरता पर भी टिप्पणी कीजिए।

10. (a) Determine the solutions of the difference equation and characterise the time path

$2x_t + x_{t-1} + 2 = 0;\ x_0 = -1$ (5)

(b) Solve the following integral

$$\int_e^6 \left(\frac{1}{1+x} + x\right) dx \quad (5)$$

P.T.O.

(क) निम्नलिखित निश्चित अभिन्न अंग का मूल्यांकन कीजिए

$$\int_0^4 f(x)\,dx$$

जब $f(x)=\begin{cases}\sqrt{4x+1} & ; \ 0 \le x \le 1 \\ x^2+2x+3 & ; \ 1 \le x \le 4\end{cases}$

(ख) मूल से गुजरने वाले और y-अक्ष पर केंद्र रखने वाले वृत्तों के परिवार का अंतर समीकरण ज्ञात कीजिये।

9. (a) For the following differential equation $\frac{dy}{dt}=5y-5$ where $y(0)=5$. Show that $y_t = 2e^{st} + 1$ is a solution to the above differential equation and comment on its equilibrium state? (4)

(b) For the following National Income Accounting problem :

$$Y_0 = 1500$$

$$I_0 = 50$$

and $C_0 = 90 + 0.10\, Y_{t-1}$

National Income Accounting Equation is given by $Y = C + I$. Find the time path of the national income (Y_t) at time t. Also comment on the stability of this time path. (6)

(a) Max $3x_1 + 5x_2$

Subject to $x_1 + 2x_2 \le 10$,

$2x_1 + x_2 \le 8$

$2x_1 + 2x_2 \le 6$

(b) Write down the dual of the above problem. (4)

निम्न LP समस्या को हल करने के लिए आलेख विधि का उपयोग कीजिए।

(क) अधिकतम $3x_1 + 5x_2$

के अधीन $x_1 + 2x_2 \le 10$,

$2x_1 + x_2 \le 8$

$2x_1 + 2x_2 \le 6$

(ख) उपरोक्त समस्या के द्वैत को लिखिए।

SECTION B (खंड ख)

(Attempt any 3 questions out of 4)

(4 में से किन्हीं 3 प्रश्नों का उत्तर दीजिए।)

7. (a) The value of a machine depreciates over time according to the relation

$$\frac{dV}{dx} = 750e^{-0.03t}$$

where V denotes the value of machine in rupees and t denotes time in years. Find depreciation in a period of 5 years. (4)

(b) A firm uses inputs L and K to produce a target level of output Q = LK, where L and K represent Labour and Capital respectively. The prices per unit of L and K are w and r respectively. Solve the following minimization problem :

Minimise C(L, K) = wL + rK

subject to Q = LK

Find the cost-minimizing level of inputs L^* and K^*. Comment on the relation between these optimal values and the level of output Q. (6)

(क) एक मशीन का मूल्य इस संबंध के अनुसार कम होता है

$$\frac{dV}{dx} = 750e^{-0.03t}$$

जहां V मशीन के मूल्य को रुपये में दर्शाता है और t वर्षों में समय को दर्शाता है। 5 वर्षों की अवधि में मूल्यह्रास ज्ञात कीजिए।

(ख) एक फर्म आउटपुट Q के लक्ष्य स्तर का उत्पादन करने के लिए इनपुट L और K का उपयोग करती है - LK, जहां L और K क्रमशः श्रम और पूंजी का प्रतिनिधित्व करते हैं। L और K की प्रति इकाई कीमतें क्रमशः w और r हैं। निम्न न्यूनीकरण समस्या को हल कीजिए :

कम C(L, K) = wL + rK

के अधीन Q = LK

इनपुट L^* और K^* का लागत-न्यूनीकरण स्तर ज्ञात कीजिए। इन इष्टतम मानों और आउटपुट Q के स्तर के बीच संबंध पर टिप्पणी कीजिए।

8. (a) Evaluate the following definite integral $\int_0^4 f(x)\,dx$

when $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1} & ; \ 0 \le x \le 1 \\ x^2 + 2x + 3 & ; \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$ (4)

(b) Find the differential equation of the family of circles passing through the origin and having centre on the y-axis. (6)

P.T.O.