Unique Paper Code: **12271102**

Name of the Paper: **Mathematical Methods for Economics I (For PwD)**

Name of the Course: **B.A. (Hons.) Economics (CBCS Core)**

Semester: **I**

Duration: **3 Hours**

Maximum Marks: **75**

Instructions for the candidates:

1. Answers may be written either in English or in Hindi; but same medium should be used throughout the paper.
2. **There are six questions in all. Attempt any four.**
3. All parts of a question must be answered together.
4. All questions carry equal (18.75) marks.
5. Use of simple calculator is allowed.

unotes.in

1. (a) Consider the proposition $1 < x^2 < 4$.

(i) For what values of x does the proposition hold true?

(ii) Is the condition $1 < x < 2$ necessary or sufficient or both necessary and sufficient for the proposition to be satisfied?

(iii) Is the condition $|x| > 1$ necessary or sufficient or both necessary and sufficient for the proposition to be satisfied?

(c) Given $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{n} + \frac{a_n}{n+1} = 0$, with $a_0, a_1, \ldots, a_n$ as constants, prove that $a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n = 0$ has atleast one real root between 0 and 1.

(c) (i) Find the intervals where f is increasing/decreasing if $f'(x) = \frac{2x+6}{x^{1/3}}$.

(ii) Find the intervals where $f'(x)$ is increasing/decreasing?

(iii) Find the local extreme values of f (if any).

(d) Consider the following system of equations

$$\alpha x + y = \beta$$

$$x + \alpha y = \beta$$

(i) For what values of α and β, does the system of equations, not have a solution.

(ii) For what values of α and β, does the system of equations, have a unique solution. Also, find the solution in this case.

(iii) For what values of α and β, does the system of equations, have infinite solutions.

(3, 5, 6, 4.75)

2. (a) (i) Solve for the set of all real numbers x that satisfy $\frac{x^2-x}{x^2+3x+2} > 0$.

(ii) Find the domain and range of $f(x) = \sqrt{\log_3(3x-4)}$.

(b) Given $f(x) = 3(x-1)^5 + 2x^3 + x + 2$. How many roots does this function have?

(c) Consider a function f that is differentiable for all x. Assume that $f(2) = -3$, $f'(2) = 5$, $f''(2) = 3$ and $f'''(2) = -8$.

(i) Write the third order Taylor's polynomial for f about $x = 2$ and use it to approximate $f(1.5)$.

(ii) If $|f^4(x)| \leq 3$ for all x, prove that $f(1.5) \neq -5$.

(d) Solve the inequality $3^x < \frac{1}{3}$. Consider points $0 < x_1 < x_2$ in the domain of $f(x) = 3^x$ and prove that $\frac{3^{x_1}+3^{x_2}}{2} > 3^{\frac{x_1+x_2}{2}}$.

(e) Examine whether the following system of equations have solutions. If they do, determine the number of degrees of freedom.

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 2$$

$$4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 7$$

(3, 3, 4, 4.75, 4)

3. (a) A travel agent surveyed 100 people to find out how many of them had visited the cities of Jaipur and Alwar. Thirty-one people had visited Jaipur, 26 people had been to Alwar, and 12 people had visited both cities. Find the number of people who had visited:

i. Jaipur or Alwar;
ii. Alwar but not Jaipur
iii. only one of the two cities;
iv. neither city.

(b) (i) Given $g(x) = a[f(x)]^2 + bf(x) + c$, find elasticity of $g(x)$ and express it in terms of e, the elasticity of $f(x)$ w.r.t x.

(ii) Given the function $f(x) = 5x^4 + 9x^3 - 11x^2 + 10$, prove that the graph of f has a slope equal to 9, somewhere between $x = -1$ and $x = 1$.

(c) Find the local maximum and minimum values of the cubic function $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{15}{2}$. Find the points of inflection (if any).

(d) (i) Consider the three vectors $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Do they span R^3?

(ii) Find the equation of the plane passing through the points $a = (1,1,-1,)$, $b = (2,0,2)$ and $c = (0,-2,1)$. Where does it cut the axes?

(3.75, 5, 5, 5)

4. (a) Let A and B be sets. Prove A ⊆ B if and only if A ∪ (B/A) = B .

(b) The population of a country grows according to the following function of time, t: $P(t) = \frac{a}{b+\left(\frac{a}{P(0)} - b\right)e^{-at}}$. Given that $P(0) = P_0$,

(i) Find $\frac{dP}{dt}$.

(ii) Find the proportional rate of growth of the population.

(iii) Show that the population has a limiting value and find this value.

(c) Find the values of x (if any) at which f is not continuous and determine whether each such discontinuity is removable.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 3}$$

(d) For the function $f(x) = \frac{5}{x^4 - 2x^2 + 3}$, find the intervals where the function is increasing/decreasing. Find the extreme points of f and classify them as local/global. Find the asymptotes of the function.

(e) Prove that $(D + ABC)^{-1} = D^{-1} - D^{-1}A(B^{-1} + CD^{-1}A)^{-1}CD^{-1}$ if $(B^{-1} + CD^{-1}A) \neq 0$ given that D and B are invertible matrices with dimensions n X n and m X m respectively. Also, A and C are matrices with dimensions $n\ X\ m$ and $m\ X\ n$ respectively.

(3, 3, 4, 5.75, 3)

5. (a) (i) Given $f(t + 2) = \sqrt{t^2 - 2t + 4}$, find $f(t)$.

(ii) What is the slope of the line tangent to the graph of $y = \frac{e^{-x}}{x+1}$ at $x = 1$?

(b) Find the domain of the function $f(x) = \frac{\ln x}{(\ln x - 1)}$. Show that f has an inverse function g and find the expression for g.

(c) If $x^2y - 3y^2 = 2x$, find $\frac{dy}{dx}$. Find the points at which the curve has vertical tangents. Check if the curve also has horizontal tangents.

(d) Given $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, x \leq 0 \\ x + 1,\ x > 0 \end{cases}$, for $x \in [-3,3]$

Is the function continuous? Is it differentiable? Does the Mean Value theorem hold? Find the absolute extreme values in the interval.

(e) The Leontief System for a two-sector economy is given as follows

$$0.8x_1 = b_1$$
$$-0.5x_1 + 0.65x_2 = b_2$$

(i) Find a_{12} *and* a_{22} and interpret them.

(ii) Assuming technology does not change find the change in the output of the two sectors if final demand of sector 1, b_1 increases by a unit. What happens to the output of the two sectors if final demand of both sectors increases by a unit each?

(3, 4, 3, 4, 4.75)

6. (a) Check if the following relations represent functions.

(i) $y = x^3$

(ii) $y^2 = x^3$

(b) Find the values of m if $f(x) = \frac{(x-m+2)^2}{x^2 - mx}$ intersects its horizontal asymptote on the line $x - y = 8$.

(c) Let U be a concave function and g be a non-decreasing and concave function. Let the function f be defined as $f(x) = g(U(x))$ for all x. Is it possible that f is a convex function? Under what circumstances will f be a concave function if g is a non-increasing function?

(d) Consider the function $f(x) = kx^3 - 27x + 6$ with $k > 0$. Find the local maximum and minimum values of the given function. What restriction on k will ensure that $f(x)$ has three distinct real roots?

(e) For n dimensional vectors v_1, v_2, v_3 and v_4, prove/disprove the following:

(i) If $v_1 + v_2$ and $v_1 - v_2$ are linearly independent then v_1 and , v_2 are also linearly independent.

(ii) If v_1, v_2 and v_3 are linearly dependent but v_1 and v_2 are linearly independent then v_3 is a linear combination of v_1 and v_2.

(iii) If v_4 is a linear combination of v_1, v_2 and v_3 and v_3 is a linear combination of v_1 and v_2, then v_1, v_2 and v_4 are linearly dependent.

(2, 4, 3, 5, 4.75)

Unique Paper Code: **12271102**

Name of the Paper: **Mathematical Methods for Economics I**

Name of the Course: **B.A. (Hons.) Economics (CBCS Core)**

Semester: **I**

Duration**: 3 Hours**

Maximum Marks**: 75**

Instructions for the candidates:

1. Answers may be written either in English or in Hindi; but same medium should be used throughout the paper.
2. **There are six questions in all. Attempt any four.**
3. All parts of a question must be answered together.
4. All questions carry equal (18.75) marks.
5. Use of simple calculator is allowed.

विद्यार्थियों के लिए निर्देश:

1. उत्तर अंग्रेजी या हिंदी माध्यम में लिखे जा सकते हैं; लेकिन सभी उत्तर एक ही माध्यम में होने चाहिए।
2. **इस प्रश्न-पत्र मे कुल छह प्रश्न हैं। किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिये।**
3. एक प्रश्न के सभी भागों के उत्तर एक ही साथ दें।
4. सभी प्रश्नों के अंक समान (18.75) हैं।
5. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

Q1. (a) For the given equation

$$y = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

(i) Find the all-possible asymptotes

(ii) Is it continuous everywhere? Is it differentiable everywhere?

(iii) Find the region(s) of increase and decrease of y.

(iv) Find the inflection point(s) if they exist. Find the intervals(s) of concavity and convexity.

(v) Does it have a global maximum or minimum? Why and why not?

(vi) Find all possible local maxima and minima if they exist.

munotes.in

(vii) Sketch the graph. (14)

(b) Find the domain of (2)

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{x+1}}$$

(c) Consider the following system of equations:

$$ax_1 + bx_2 = p$$

$$cx_1 + dx_2 = q$$

$$ex_1 + fx_2 = r$$

Write down the augmented matrix. If the augmented matrix is row equivalent to identity matrix, then is the system of equations consistent? Justify your answer. (2.75)

(a) निम्नलिखित समीकरण के लिए:

$$y = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

(i) सभी संभव अनन्तस्पर्शीयों (asymptotes) को ज्ञात कीजिए।

(ii) क्या यह सर्वत्र सतत है? क्या यह सर्वत्र अवकलनीय है?

(iii) y में वृद्धि और ह्रास के क्षेत्र(त्रों) को ज्ञात कीजिये।

(iv) अगर विभक्ति (inflection) बिन्दु विद्यमान हैं, तो उनको ज्ञात कीजिये। अवतलता और उत्तलता के अंतराल(लों) को ज्ञात कीजिये।

(v) क्या इसके कोई ग्लोबल उच्चिष्ट या निम्निष्ट हैं? यदि हैं तो, क्यों है और नहीं हैं, तो क्यों नहीं हैं?

(vi) अगर स्थानीय उच्चिष्ट अथवा निम्निष्ट विद्यमान हैं, तो उन सभी को ज्ञात कीजिये।

(vii) रेखा-चित्र बनाइये।

(b) निम्नलिखित का अनुक्षेत्र (डोमेन) ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{x+1}}$$

(c) निम्नलिखित समीकरण पदयति पर विचार कीजिये।

$$ax_1 + bx_2 = p$$
$$cx_1 + dx_2 = q$$
$$ex_1 + fx_2 = r$$

संवर्धित आव्यूह लिखें। यदि संवर्धित आव्यूह तत्समक आव्यूह के पंक्ति समकक्ष हो तो क्या समीकरणों की यह पदयति सुसंगत है? अपने जवाब का औचित्य साबित कीजिये।

Q2. (a) A bus has a total capacity of 60 people. The relation between the numbers of people per trip (x) to the fare charged (p rupees) is given by $p = [3 - \left(\frac{x}{40}\right)]^2$. Write an expression for total revenue $R(x)$ per trip received by the bus company. Find the number of people per trip that will maximize the revenue. (4)

(b) Suppose that the two functions, f and g, are differentiable on an interval $[a, b]$ and we have $f(a) = g(a)$ and $f(b) = g(b)$. Show that there is at least one point between a and b where the tangents to the graphs of f and g are parallel. (4)

(c) Show that the tangent to the curve $y = x^3$ at any point (c, c^3) meets the curve again at z point where the slope is four times the slope at (c, c^3). (4)

(d) Determine if the following function has an inverse. (2.75)

$$f(x) = |x + 4| - |x - 4|$$

(e) For what values of p, the given system of equations below has a unique solution

$$(p + 1)x + (p + 1)y = q$$
$$4x + (p + 4)y + (p - 1)z = 1$$
$$3x + 5y + (p - 1)z = -3\ .$$

What conditions must q satisfy for the system to have a solution when $p = 1$

Find that solution. (4)

(a) एक बस की कुल क्षमता 60 व्यक्ति है। प्रति ट्रिप व्यक्तियों की संख्या (x) का किराए (p रुपये) के साथ संबंध $p = [3 - \left(\frac{x}{40}\right)]^2$ के द्वारा दिया गया है। बस कंपनी द्वारा प्रति ट्रिप प्राप्त

कुल राजस्व $R(x)$ के लिए एक अभिव्यक्ति लिखें। प्रति ट्रिप लोगों की वह संख्या ज्ञात कीजिये जिससे अधिकतम राजस्व प्राप्त हो।

(b) मान लीजिये कि f और g, अंतराल (a, b) पर अवकलनीय है और $f(a) = g(a)$ तथा $f(b) = g(b)$ है। दिखाइए कि a और b के बीच कम से कम एक बिंदु है जहाँ f और g के ग्राफों की स्पर्शरेखाएं समानांतर हैं।

(c) दिखाइए कि वक्र $y = x^3$ की किसी भी बिन्दु (c, c^3) पर स्पर्शरेखा उस वक्र को उस बिन्दु z पर पुनः मिलती है जहाँ का ढाल, (c, c^3) पर ढाल का चार गुना है।

(d) यदि निम्नलिखित फलन का कोई वुयत्क्रम है तो निर्धारित कीजिये:

$$f(x) = |x + 4| - |x - 4|$$

(e) p के किन मूल्यों के लिए, समीकरणों की नीचे दी गई पद्यति का एक अद्वितीय हल है:

$$(p + 1)x + (p + 1)y = q$$
$$4x + (p + 4)y + (p - 1)z = 1$$
$$3x + 5y + (p - 1)z = -3\ .$$

जब $p = 1$ हो तो पद्यति के हल के लिए के लिए q को किन शर्तों को पूरा करना चाहिए। वह हल ज्ञात कीजिये।

Q3. (a) A function f and its derivative take on the values shown in the table. If g is the inverse of f, find $g'(6)$

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	6	1/3
6	8	3/2

(4)

(b) For $0 < a < 1$, find the optimum value(s) of the function $f(x) = xa^x$. (4)

(c) The elasticity of a function $y = f(x)$ is given as ρ. Then find the elasticities of the total function, $xf(x)$, and the average function $\frac{f(x)}{x}$ in terms of ρ .

Also find the values of ρ for which the total function and the average function can have their respective maximums. (4)

(d) Let $L_1: 2+t, -t, 2-t$ and $L_2: -1-2s, s, 2+3s$,. be two lines. Show that L_1 and L_2 do not intersect. The line L_3 passes through the point $P\ (1,1,3)$ and its direction is perpendicular to the directions of both L_1 and L_2. Obtain parametric equations for L_3. Find the coordinates of point Q where L_3 and L_2 intersect and verify P lies on L_1. (3.75)

(e) If a quantity A is growing exponentially over the time, and A_1, A_2 are the values at times t_1 and t_2 respectively, then find the growth rate of the quantity in terms of A_1 and A_2. (3)

Q3. (a) एक फलन f और इसके अवकलज के मान नीचे तालिका मे दर्शाये गए हैं। यदि g, f का व्युत्क्रम हो तो g′(6) ज्ञात कीजिये।

x	$f(x)$	$f'(x)$
2	6	1/3
6	8	3/2

(b) $0 < a < 1$, के लिए फलन $f(x) = xa^x$ का इष्टतम मान ज्ञात कीजिये।

(c) एक फलन, $y = f(x)$, की लोच ρ से दी गयी है। ρ के पदों मे कुल फलन, $xf(x)$, और औसत फलन, $\frac{f(x)}{x}$, की लोच ज्ञात कीजिये। ρ के उन मानों को भी ज्ञात कीजिये जिनके लिए कुल फलन और औसत फलन के अपने संबंधित उच्चिष्ट हो सकते हैं।

(d) मान लीजिये कि $L_1: 2+t, -t, 2-t$ और $L_2: -1-2s, s, 2+3s$ दों रेखाएँ हैं। दिखाये कि L_1 और L_2 परस्पर काटते नहीं हैं। रेखा L_3 बिन्दु $P\ (1,1,3)$ से होकर गुजरती है और इसकी दिशा L_1 और L_2 दोनों की दिशाओं के लम्बवत है। L_3 के लिए पैरामीट्रिक समीकरण ज्ञात कीजिये। बिन्दु Q, जहाँ कि L_1 और L_2 परस्पर काटते हैं, के निर्देशांक ज्ञात कीजिये और प्रमाणित कीजिये कि P, L_1 पर है।

(e) यदि समय के साथ एक मात्रा A घातांकीयता (exponentially) से बढ़ रही हो, और A_1, A_2 क्रमशः t_1 और t_2 समय पर इसके मान हों, तो A_1 और A_2 के पदों में मात्रा की वृद्धि दर ज्ञात करें।

Q4. (a) Determine if the function $f(x) = e^{-x^2/2}$ is concave or convex in x. Find the local maxima, minima, and inflection points. Sketch the graph. Does it have a global maximum, minimum? (4.75)

(b) Given that f'' is continuous on $[a,b]$ and f has three zeros in the interval. Show that f'' has at least one zero in (a,b). (3)

(c) Find the equation of the tangent lines to the inverse at the given point

$f(x) = \frac{-e^{-3x}}{x^2+1}$ at (-1,0)

$g(x) = 7x^3 + (\ln x)^3$ at (7,1) (5)

(d) Let n be an odd positive integer. Determine whether there exists an $n \times n$ real matrix such that

$$A^2 + I = 0\ ,$$

where A is an $n \times n$ matrix, I is identity matrix, and 0 is a null matrix. (3)

(e) Let A and B are $n \times n$ matrices with real entries. Given that $A+B$ is invertible, show that

$$A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$$ (3)

(a) निर्धारित कीजिये कि फलन $f(x) = e^{-x^2/2}$, x में अवतल है या उत्तल। स्थानीय अधिकतम और स्थानीय न्यूनतम और विभक्ति के बिंदु (बिन्दुओं) को ज्ञात करें। रेखा-चित्र बनाइये। क्या इसका ग्लोबल उच्चिष्ट, निम्निष्ट है?

(b) दिया गया है कि f'' $[a,b]$ पर सतत है और f के अंतराल मे तीन शून्य हैं। दिखाइये की f'' की (a,b) मे न्यूनतम एक शून्य है।

(c) दिये गए बिन्दुओं पर व्युत्क्रम से स्पर्शी रेखाओं की समीकरण ज्ञात कीजिये:

$f(x) = \frac{-e^{-3x}}{x^2+1}$ बिन्दु (-1,0) पर

$g(x) = 7x^3 + (\ln x)^3$ बिन्दु (7,1) पर

(d) मान लीजिये की n एक विषम धनात्मक पूर्णांक है। निर्धारित कीजिये कि क्या एक $n \times n$ वास्तविक आव्यूह विध्यमान है, ताकि:

$$A^2 + I = 0\ ,$$

जहाँ A एक $n\ x\ n$ आव्यूह, I तत्समक आव्यूह, और 0 एक शून्य (null) आव्यूह है।

(e) मान लीजिये कि A और B $n\ x\ n$ वास्तविक प्रविष्टियों वाले आव्यूह हैं। दिया गया है कि $A + B$ प्रतीप्य (invertible) है, तो दिखाये कि

$$A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$$

Q5. (a) Let $f(x) = x^m(1 - x)^n$, where m and n are integers greater than 1. Show that $y = f(x)$ has a stationary point in the interval $0 < x < 1$. Show that this stationary point is maximum if n is even and a minimum if n is odd. (5)

(b) Suppose the population $A(t)$ of a species grows exponentially so that

$$A(t) = A(0)e^{rt},$$

Where $A(0)$ is the initial population, t is the number of years and r is a positive constant. Now answer the following questions.

(i) If the population doubles in n years, find n.

(ii) Show that the above function can be written as $A(t) = A(0)2^{\frac{t}{n}}$ (5)

(c) Let w_1 and w_2 be two vectors in R^n. Moreover, they are of unit length i.e. $||w_1|| = ||w_2|| = 1$ and their dot product is given by $w_1.w_2 = w_1'w_2 = -1/2$, where w_1' is the transpose of w_1. Find the length of $(w_1 - w_2)$ i.e. $||w_1 - w_2||$. (4.75)

(d) Let u_1 and u_2 be two $nx1$ column vectors. Prove that $tr(u_1u_2') = u_1'u_2$ (4)

(a) मान लीजिये $f(x) = x^m(1 - x)^n$, जहाँ m और n, 1 से अधिक मान वाले पूर्णांक हैं। दिखाइये कि $y = f(x)$ का अंतराल $0 < x < 1$ में एक स्थिर बिंदु है। दिखाइए कि अगर n सम है तो यह स्थिर बिंदु उच्चिष्ट है और यदि n विषम है तो यह निम्निष्ट है ।

(b) मान लीजिये कि एक प्रजाति की जनसंख्या $A(t)$ मे इस प्रकार घातांकीय वृद्धि होती है, कि

$$A(t) = A(0)e^{rt}$$

जहाँ, $A(0)$ प्रांरभिक जनसंख्या है, t वर्षों की संख्या है और r एक धनात्मक स्थिरांक है। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिये:

(i) यदि n वर्षों मे जनसंख्या दोगुनी हो जाती है, तो n ज्ञात कीजिये।

(ii) दिखाइये कि उपरोक्त फलन को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$A(t) = A(0)2^{\frac{t}{n}}$$

(c) मान लीजिये कि w_1 and w_2 R^n में दो वेक्टर है। इसके अलावा वे इकाई लंबाई के हैं अर्थात $||w_1|| = ||w_2|| = 1$ और उनकी डॉट गुना $w_1.w_2 = w_1'w_2 = -1/2$ के द्वारा दी गयी है। जहाँ w_1', w_1 का पक्षान्तर है। $(w_1 - w_2)$ अर्थात $||w_1 - w_2||$ की लंबाई ज्ञात कीजिये।

(d) मान लीजिये कि u_1 and u_2 दो $nx1$ स्तम्भ वेक्टर हैं। सिद्ध कीजिये कि

$$tr(u_1u_2') = u_1'u_2$$

Q6. (a) An epidemic spread through a community in such a way that t weeks after its outbreak, the number of residents who have been infected is given by the function

$$f(t) = \frac{9000}{1+999e^{-t}}\ ,$$

where 9000 is the total number of susceptible residents. Show that the epidemic is spreading most rapidly when half the susceptible residents have been infected. What happens over time? Sketch the graph. (4)

(b) Let u, v, w be three vectors in R^n. Suppose that vectors u, v are orthogonal and the norm of v is 4 and $v'w = 7$. Find the value of the real number x in $u = v + xw$.

(4)

(c) Let A be an $n\ x\ n$ nonsingular matrix of linear transformation. Let $v_1$and v_2 be linearly independent vectors in R^n. Prove that the vectors Av_1 and Av_2 are linearly independent. (4)

(d) Show that $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ for $x > 0$ (2.75)

(e) Test the convergence of the series

$$\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+5}{n\sqrt{n+3}}\right)$$ (4)\

(a) एक महामारी सामुदायिक स्तर पर इस प्रकार फैलती है कि इसके शुरू होने के t हफ्तों बाद संक्रमित निवासियों की संख्या को अग्रलिखित फलन के द्वारा दिया जाता है:

$$f(t) = \frac{9000}{1+999e^{-t}} \quad ,$$

जहाँ अतिसंवेदनशील निवासियों की कुल संख्या 9000 है। दिखाइये कि महामारी उस समय सर्वाधिक तीव्रता से फैलती है जब आधे अतिसंवेदनशील निवासी संक्रमित हो जातें हैं। समय बीतने के साथ क्या घटित होता है? रेखा-चित्र बनाइये।

(b) मान लीजिये कि u, v, w R^n में तीन वेक्टर है। मान लीजिये कि u, v वेक्टर आयतीय हैं और v का नोर्म 4 है और $v'w = 7$। वास्तविक संख्या x का मान $u = v + xw$ में ज्ञात कीजिए।

(c) मान लीजिये कि A एक $n \, x \, n$ वाला रैखिक परिवर्तन का व्युत्क्रमणीय (non-singular) आव्यूह है। मान लीजिये कि v_1और v_2 R^n में रैखिक रूप से स्वतंत्र वेक्टर हैं। सिद्ध कीजिये कि वेक्टर Av_1 और Av_2 रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

(d) दिखाइये कि, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ for $x > 0$

(e) निम्नलिखित श्रृंखला के अभिसरण की जांच कीजिये।

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n\sqrt{n+3}}\right)$$

unotes