(This question paper contains   printed pages)

Roll Number:

Serial Number of question paper:

Unique Paper Code: 12277502

Name of the Paper: Applied Econometrics

Name of the Course: B.A. (Honours) Economics CBCS

Semester Semester V

Duration: 3 hours

Maximum Marks: 75

Instructions for Candidates

1. **Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.**
2. **Answers may be written in English or Hindi but the same medium should be used throughout the paper.**
3. **The question paper consists of six questions. Answer any *four* questions.**
4. **All questions carry equal marks.**
5. **Use of simple non programmable calculator is allowed.**
6. **Statistical tables are attached for your reference.**

munotes.in

परीक्षार्थियों हेतु अनुदेश

1. इस प्रश्न-पत्र के प्राप्त होते ही तुरन्त सबसे ऊपर अपना रोल नम्बर लिखिए।
2. उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी में दिए जा सकते हैं परन्तु पूरे पेपर में एक ही माध्यम का उपयोग किया जाना चाहिए।
3. इस प्रश्न-पत्र में **छः** प्रश्न हैं। किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
4. सभी प्रश्नों के बराबर अंक हैं।
5. साधारण अप्रोग्रामनीय कैलकुलेटर का प्रयोग मान्य है।
6. आपके सन्दर्भ हेतु सांख्यिकीय सारिणियाँ संलग्न हैं।

Q1. (a) Given the following matrices:

$$X'X = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 30 & 106 \end{pmatrix} \quad X'y = \begin{pmatrix} 30 \\ 92 \end{pmatrix}$$

(i) Calculate $\hat{\beta}_1$ *and* $\hat{\beta}_2$,

(ii) Given, $\sum Y_i^2 = 106$, calculate $\hat{\sigma}^2$

(iii) If $x_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, find mean prediction of Y. What is the estimated variance of mean prediction?

(b) To study the behavior of U.S states and local government expenditure, the researchers developed the following simultaneous equation model:

$$Exp_i = \beta_1 + \beta_2 AID_i + \beta_3 Inc_i + \beta_4 Pop_i + u_i$$

$$AID_i = \delta_1 + \delta_2 Exp_i + \delta_3 PS_i + v_i$$

where, Exp= State and Local Government Public Expenditures
AID= Level of Federal Grants-in-Aid
Inc= Income of States
Pop= State Population
PS= Population of Primary and Secondary school children

In this model, Inc, Pop, and PS are regarded as exogenous while Exp and AID are endogenous variables.

$E(u_i) = 0 \;\; E(v_i) = 0 \;\; E(u_i, u_j) = 0 \;\; E(v_i, v_j) = 0$

$E(u_i^2) = \sigma_u^2 \quad E(v_i^2) = \sigma_v^2 \quad E(u_i, v_i) = 0$

Cov (Inc, u_i)=0 Cov(Pop, u_i)=0 Cov(PS, v_i)=0

(i) Are the OLS estimators for β and δ coefficients consistent? Explain your answer.

(ii) Show that the covariances of stochastic explanatory variables, Exp and AID with the relevant disturbance terms are not equal to zero.

(9.5+9.25)

(a) आव्यूहों $X'X = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 30 & 106 \end{pmatrix} \quad X'y = \begin{pmatrix} 30 \\ 92 \end{pmatrix}$ हेतु

(i) $\hat{\beta}_1$ व $\hat{\beta}_2$ की गणना कीजिए।

(ii) यदि, $\sum Y_i^2 = 106$, तो $\hat{\sigma}^2$की गणना कीजिए।

(iii) यदि $x_o = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$, तो Y का माध्य पूर्वकथित मान ज्ञात कीजिए। माध्य पूर्वकथन का आकलित प्रसरण क्या है?

(b) अमेरिका में राज्य व स्थानीय सरकारों के व्यय के व्यवहार का अध्ययन करने हेतु शोधकर्ताओं ने निम्नलिखित युगपत समीकरण मॉडल का विकास किया:

munotes.in

$$Exp_i = \beta_1 + \beta_2 AID_i + \beta_3 Inc_i + \beta_4 Pop_i + u_i$$

$$AID_i = \delta_1 + \delta_2 Exp_i + \delta_3 PS_i + v_i$$

जहाँ, Exp= राज्य व स्थानीय सरकारों के लोक व्यय

AID= संघीय अनुदान का स्तर

Inc= राज्यों की आय

Pop= राज्य की जनसंख्या

PS= प्राथमिक व माध्यमिक विद्यालयों में बच्चों की संख्या

इस मॉडल में Inc, Pop, व PS बहिर्जात (exogenous) माने गए हैं जबकि Exp व AID अन्तर्जात (endogenous) चर हैं।

$$E(u_i) = 0 \quad E(v_i) = 0 \quad E(u_i, u_j) = 0 \quad E(v_i, v_j) = 0$$
$$E(u_i^2) = \sigma_u^2 \quad E(v_i^2) = \sigma_v^2 \quad E(u_i, v_i) = 0$$
$$Cov\ (Inc, u_i)=0 \quad Cov(Pop, u_i)=0 \quad Cov(PS, v_i)=0$$

(i) क्या β व δ गुणांकों हेतु OLS आकलक सुसंगत (consistent) हैं? अपने उत्तर को समझाइए।

(ii) दर्शाइए कि यादृच्छिक व्याख्याकारी चरों, Exp व AID कै संगत त्रुटि पद के साथ सहप्रसरण शून्य नहीं है।

(9.5+9.25)

Q2. (a)On the basis of quarterly data collected from 2001 to 2010 a researcher wants to find if there is any causality between Money Supply (M) and Interest Rate (R). Consider following equations:

$$M_t = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i M_{t-i} + \sum_{j=1}^{4} \Phi_j R_{t-j} + u_{1t}$$
$$R_t = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i M_{t-i} + \sum_{j=1}^{4} \beta_j R_{t-j} + u_{2t}$$

(i) Establish a formal test to detect causality from M to R.

(ii) What additional test is required to address bilateral causality? Clearly explain how to conduct the test and define F statistic.

(iii) Using F tests state under what conditions it is suggested that the two variables- M and R are independent of each other.

(iv) Given that:

Direction of causality	F- value
$R \rightarrow M$	6.59
$M \rightarrow R$	3.65

At 5% level of significance, check if there exists unidirectional or bilateral causality. Specify your null hypothesis and alternate hypothesis.

munotes.in

(b) In the regression model: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$

(i) Suppose $Cov\ (X, u) \neq 0$. Show that the OLS estimator of β_1 is inconsistent.

(ii) Let Z be an instrumental variable (IV) for X satisfying the necessary conditions. Show that the IV estimator for β_1 is consistent.

(iii) If however, Z is not completely exogenous show that the IV estimator is inconsistent.

(iv) What will be the conditions in which we will still prefer instrumental variable estimator over OLS?

(9.5+9.25)

(a) 2001 से 2010 की अवधि हेतु संग्रहित त्रैमासिक आंकड़ों की सहायता से एक शोधकर्ता यह ज्ञात करना चाहता है कि क्या मुद्रा की आपूर्ति (M) व ब्याज दर (R) के मध्य कोई कारण सम्बन्ध है। निम्नलिखित समीकरणों पर विचार कीजिए:

$$M_t = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i\, M_{t-i} + \sum_{j=1}^{4} \Phi_j\, R_{t-j} + u_{1t}$$

$$R_t = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, M_{t-i} + \sum_{j=1}^{4} \beta_j\, R_{t-j} + u_{2t}$$

(i) M से R की ओर कारण सम्बन्ध का पता लगाने हेतु एक औपचारिक परीक्षण स्थापित कीजिए।.

(ii) द्विपक्षीय कारण सम्बन्ध हेतु कौनसे अतिरिक्त परीक्षण की आवश्यकता होती है? इस परीक्षण को कैसे किया जाए, यह स्पष्टतः समझाइए तथा F प्रतिदर्शज को परिभाषित कीजिए।.

(iii) F परीक्षणों की सहायता से यह बताइए कि किन परिस्थितियों में यह कहा जाता है कि दो चर - M व R एक दूसरे से स्वतन्त्र हैं।

(iv)दिया हुआ है कि:

Direction of causality	F- value
$R \rightarrow M$	6.59
$M \rightarrow R$	3.65

5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए कि क्या एकदिशीय या द्विपक्षीय कारण सम्बन्ध है। अपनी शून्य व वैकल्पिक परिकल्पनाएँ लिखिए।

(b) समाश्रयण मॉडल: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ में,

(i) मान लीजिए कि $Cov\ (X, u) \neq 0$. दर्शाइए कि β_1का OLS आकलक असंगत (inconsistent) है।

(ii) मान लीजिए कि Z, X हेतु एक यांत्रिक चर है तथा यह इस हेतु आवश्यक शर्तों को सन्तुष्ट करता है। दर्शाइए कि β_1 हेतु IV आकलक सुसंगत (consistent) है।

(iii) परन्तु यदि, Z पूर्णतः बहिर्जात नहीं है तो दर्शाइए कि IV आकलक असंगत है।

(iv)वे कौनसी स्थितियाँ हैं जिनमें इसके बावजूद हम OLS की अपेक्षा यांत्रिक चर आकलक को चुनेंगे?

(9.5+9.25)

munotes.in

Q3. (a) A researcher studies investment function of 6 firms for 10 years. The results are presented below:

Variable	Coefficient	Std. error	t-statistic
Intercept	-72.143	83.9292	-0.8596
Sales	0.1123	0.0176	6.3807
Cost	0.2453	0.0114	21.5175
Random Effect: Firm 1: (-172.9431) Firm 2: (-10.5077) Firm 3: (-11.7421) Firm 4: 169.5642 Firm 5: 14.8572 Firm 6: 10.7715 R^2= 0.9323			

(i) Write down the regression model and explain the Random Effects model (ECM) used to obtain the results above.
(ii) Interpret value of the common intercept.
(iii) Interpret value of Random Effects of Firm 1 and Firm 4.
(iv) Find sum of the estimated Random Effect values for all six firms. Explain your result.
(v) Set up a formal test to choose between FEM and ECM. Clearly specify null and alternate hypothesis. If the Hausman test statistic for this model = 4.786217 (d.f =2), interpret your results at 5% level of significance.

munotes.in

(b) A researcher estimates the following two functional forms for Cobb-Douglas production function:

Model 1: $Q_i = A_1 + A_2(\text{labour}) + A_3(\text{capital}) + u_i$

Model 2: $\ln(Q_i) = B_1 + B_2 \ln(\text{labour}) + B_3 \ln(\text{capital}) + v_i$

(i) Can we choose between the two models based on the value of R^2?
(ii) Outline the steps to conduct a test to choose which functional form fits the data better.
(iii) Using cross section data for 100 firms, if the Residual Sums of Squares (RSS) for the two models are:

	RSS
Log-linear Model :	2.3352
Linear Model :	2.6891

Use the formal test outlined in (ii) to choose between the two models. State null and alternative hypothesis clearly. Choose 1% level of significance (you are given that ln(1.15155)=0.14111).

(iv) In model 2, if it is believed that the researcher should include another explanatory variable-‘energy’ to the model, explain how to conduct the LM test for omitted variables.

(9.5+9.25)

(a) एक शोधकर्ता 10 वर्षों हेतु 6 फर्मों के निवेश फलन का अध्ययन करता है। परिणाम निम्न प्रकार हैं:

Variable	Coefficient	Std. error	t-statistic
Intercept	-72.143	83.9292	-0.8596
Sales	0.1123	0.0176	6.3807
Cost	0.2453	0.0114	21.5175
Random Effect: Firm 1: (-172.9431) Firm 2: (-10.5077) Firm 3: (-11.7421) Firm 4: 169.5642 Firm 5: 14.8572 Firm 6: 10.7715 R^2= 0.9323			

munotes.in

(i) समाश्रयण मॉडल को लिखिए तथा इन परिणामों को प्राप्त करने हेतु उपयोग किए गए याद्दच्छिक प्रभाव मॉडल (ECM) को समझाइए।
(ii) सर्वनिष्ठ अन्तःखण्ड के मान को समझाइए।
(iii) फर्म 1 व फर्म 4 हेतु याद्दच्छिक प्रभावों के मानों को समझाइए।
(iv) सभी 6 फर्मों हेतु आकलित यादच्छिक प्रभावों के मानों का योगफल ज्ञात कीजिए। अपने परिणामों को समझाइए।
(v) FEM व ECM के मध्य चयन हेतु एक औपचारिक परीक्षण की रुपरेखा दीजिए। शून्य व वैकल्पिक परिकल्पनाओं को स्पष्टतः लिखिए। यदि इस मॉडल हेतु हॉसमैन परीक्षण प्रतिदर्शज = 4.786217 (d.f =2) है, तो 5% सार्थकता स्तर पर अपने परिणामों की व्याख्या कीजिए।

(b) एक शोधकर्ता कॉब-डगलस उत्पादन फलन हेतु निम्नलिखित दो कार्यात्मक रूपों को आकलित करता है:

Model 1: $Q_i = A_1 + A_2(\text{labour}) + A_3(\text{capital}) + u_i$
Model 2: $\ln(Q_i) = B_1 + B_2 \ln(\text{labour}) + B_3 \ln(\text{capital}) + v_i$

(i) क्या हम R^2 के मान के आधार पर इन दो मॉडलों में से चयन कर सकते हैं?
(ii) कौनसा कार्यात्मक रूप बेहतर है, इसका चयन करने हेतु किए जाने वाले परीक्षण के चरणों की रुपरेखा दीजिए।

(iii) 100 फर्मों हेतु अनुप्रस्थ आँकड़ों की सहायता से इन दो मॉडलों हेतु प्राप्त अवशिष्ट वर्गयोग के मान निम्न प्रकार हैं:

	RSS
Log-linear Model :	2.3352
Linear Model :	2.6891

इन दो मॉडलों के मध्य चयन हेतु भाग (ii) में दिए गए औपचारिक परीक्षण का उपयोग कीजिए। शून्य व वैकल्पिक परीकल्पनाओं को स्पष्टतः लिखिए। 1% सार्थकता स्तर का उपयोग कीजिए। (आपको दिया हुआ है कि ln(1.15155)=0.14111).

(iv) मॉडल 2 में यदि आपको यह लगता है कि शोधकर्ता को एक अन्य व्याख्याकारी चर 'energy' को मॉडल में शामिल करना चाहिए, तो समझाइए कि आप छोड़े गए चरों हेतु LM परीक्षण किस प्रकार करेंगे।

(9.5+9.25)

Q4. (a) Consider the following model to estimate demand for real cash balance:

$$M_t = \alpha + \beta_1 Y_t^* + u_t$$

where, M = demand for real cash balances

Y_t^*= expected real income and t = time

(i) If expected income is formed according to adaptive expectations hypothesis derive the short run demand function for real cash balances.

(ii) On the basis of quarterly data collected from 1971 to 1980, short run demand for real cash balances is estimated as follows:

$$\widehat{Mt} = -1342.15 + 0.6134\, Y_t + 0.4216\, M_{t-1}$$

Calculate and interpret the coefficient of expectation and write down the long run demand function for real cash balances.

(iii) Interpret the coefficient of Y_t in the estimated short and long run demand functions for real cash balances.

(iv) Explain how to detect autocorrelation in an adaptive expectations model. Why cannot we use the Durbin Watson d Statistic?

(v) Given that Durbin -Watson d Statistic = 1.1054, calculate Durbin's h statistic. Test your null hypothesis at 5% level of significance.

(b) (i) Show how Recursive Least Squares can be used to check for the point of structural break in a time series.

(ii) To study the rate of growth of savings of a country over the period 1981-2000(both years inclusive), the following model was estimated:

$$\ln S = 200.73 + 0.012t$$

(se) (0.5747) (0.004) RSS=98.212

where ln = natural log, S = Savings in crores of Rupees, t = trend variable.

Suppose the researcher also estimated separate regressions for two time periods and found:

1981-1990	RSS_a :	18.263
1991-2000	RSS_b:	36.752

Apply the Chow test to see if there is evidence of a structural break in1991. Choose 5% level of significance and state your conclusion.

(9.5+9.25)

munotes.in

(a) वास्तविक नकद शेष हेतु मांग आकलित करने हेतु निम्नलिखित मॉडल पर विचार कीजिए:

$$M_t = \alpha + \beta_1 Y_t^* + u_t$$

जहाँ, M = वास्तविक नकद शेष हेतु मांग

Y_t^* = प्रत्याशित वास्तविक आय

t = समय

(i) यदि प्रत्याशित आय का निर्माण अनुकूलनशील प्रत्याशा परिकल्पना के अनुसार किया जाता है तो वास्तविक नकद शेष हेतु अल्पकालीन मांग फलन को व्युत्पन्न कीजिए।

(ii) 1971 से 1980 की अवधि हेतु त्रैमासिक आंकड़ों के आधार पर आकलित वास्तविक नकद शेष मांग फलन निम्न्न प्रकार है:

$$\widehat{Mt} = -1342.15 + 0.6134\, Y_t + 0.4216\, M_{t-1}$$

(se) (412.61) (0.1497) (0.0302)

प्रत्याशा के गुणांक को ज्ञात कीजिए व समझाइए तथा वास्तविक नकद शेष हेतु दीर्घकालीन मांग फलन को लिखिए।

(iii) वास्तविक नकद शेष हेतु आकलित अल्पकालीन व दीर्घकालीन मांग फलनों में Y_t के गुणांक की व्याख्या कीजिए।

(iv) समझाइए कि अनुकूलनशील प्रत्याशा मॉडल में स्वसहसम्बन्ध का पता किस प्रकार लगाया जाता है। हम डर्बिन-वॉट्सन के d प्रतिदर्शज का उपयोग क्यों नहीं कर सकते?

(v) दिया हुआ है कि डर्बिन वॉट्सन का d प्रतिदर्शज = 1.1054, तो डर्बिन के h प्रतिदर्शज की गणना कीजिए। अपनी शून्य परिकल्पाना का 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए।

(b) (i) दर्शाइए कि पुनरावर्ती न्यूनतम वर्ग विधि की सहायता से किस प्रकार कालश्रेणी में संरचनात्मक परिवर्तन के बिन्दु की जाँच की जा सकती है।

(ii) अवधि 1981-2000 (दोनों वर्षों को सम्मिलित करते हुए) में किसी देश में बचत की वृद्धि दर का अध्ययन करने हेतु निम्नलिखित मॉडल को आकलित किया गया:

ln S = 200.73 + 0.012t

(se) (0.5747) (0.004) RSS=98.212

जहाँ ln = natural log, S = Savings, करोड़ रुपयों में, t = trend variable

मान लीजिए कि शोधकर्ता ने दो लघुतर अवधियों हेतु अलग समाश्रयण भी आकलित किए तथा पाया कि:

1981-1990 RSS_a : 18.263

1991-2000 RSS_b: 36.752

क्या 1991 में संरचनात्मक परिवर्तन का कोई प्रमाण है, यह देखने हेतु चाउ का परीक्षण लगाइए। 5% सार्थकता स्तर का उपयोग कीजिए तथा अपने निष्कर्ष को लिखिए।

(9.5+9.25)

Q5. (a) A researcher collects panel data of 3 firms over 8 years from 2005 to 2012 to estimate a revenue function: $R_{it} = \beta_1 + \beta_2 I_{it} + \beta_3 A_{it} + u_{it}$

Where R is revenue of firm in Rs. Lacs, I is R&D expenditure in Rs. '000 and A is advertising expenditure in Rs.'000.

(i) Write down the Fixed Effects regression model allowing cross section effects and explain the model.

(ii) How can Fixed Effects model allow for time dimension for this panel data? Specify the regression equation incorporating time intercept dummies. After allowing for these cross section and time dummies how many degrees of freedom are there in the estimated model?

(iii) Write down the regression model if Fixed Effects Within Group model is used and explain how the model accounts for unobserved heterogeneity.

(b) Consider the k-variable linear regression model:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \quad i = 1,2, \ldots .. n$$

(i) Given $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y}$ show that the OLS estimator $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ is an unbiased estimator of $\boldsymbol{\beta}$ .Show that variance-covariance $(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ = $\sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$

(ii) Given : n=10 , k=2 and
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'y} = 174.4 \quad \sum Y_i = 40 \quad \sum Y_i^2 = 176$
Calculate ESS, RSS and TSS and find the value of R^2. Write down the ANOVA table and test overall significance of regression at 5% level of significance.

(9.5+9.25)

(a) एक शोधकर्ता राजस्व फलन $R_{it} = \beta_1 + \beta_2 I_{it} + \beta_3 A_{it} + u_{it}$ का आकलन करने हेतु 3 फर्मों हेतु 2005 से 2012 के 8 वर्ष के आँकड़े एकत्र करता है, जहाँ R फर्म का राजस्व है लाख रुपयों में, I, R&D व्यय है '000 रुपयों में तथा A विज्ञापन व्यय है,'000 रुपयों में।

(i) अनुप्रस्थ प्रभावों वाले स्थिर प्रभाव समाश्रयण मॉडल को लिखिए तथा इस मॉडल को समझाइए।

(ii) इस स्थिर प्रभाव मॉडल में समय आयाम (time dimension) को किस प्रकार सम्मिलित किया जा सकता है? समय के अन्तःखण्ड मूक चरों को सम्मिलित करते हुए समाश्रयण समीकरण लिखिए। इन अनुप्रस्थ व समय मूक चरों को सम्मिलित करने के बाद आकलित मॉडल में कितनी स्वातंत्र्य कोटियाँ हैं?

(iii) यदि स्थिर प्रभाव समूह-के-अन्दर (Fixed Effects Within Group) मॉडल का उपयोग किया जाता है तो समाश्रयण मॉडल को लिखिए तथा समझाइए कि किस प्रकार यह मॉडल अप्रेक्षित विजातीयता (unobserved heterogeneity) को सम्मिलित करता है।

(b) k-चरों वाले रेखीय समाश्रयण मॉडल:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \quad i = 1,2, \ldots .. n$$

पर विचार कीजिए।

(i) यदि यह दिया हुआ है कि $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y}$ तो दर्शाइए कि OLS आकलक $\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{\beta}$ का एक अनभिनत आकलक है। दर्शाइए कि . variance-covariance $(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ = $\sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$

(ii) यदि : n=10 , k=2 तथा
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X'y} = 174.4 \quad \sum Y_i = 40 \quad \sum Y_i^2 = 176$
तो ESS, RSS व TSS की गणना कीजिए तथा R^2 का मान ज्ञात कीजिए।
ANOVA सारिणी लिखिए तथा इस समाश्रयण की समग्र सार्थकता का 5% सार्थकता स्तर पर परीक्षण कीजिए।

(9.5+9.25)

munotes.in

Q6. (a) Consider the simple regression model:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

Suppose X and u are correlated. Let Z be an instrumental variable for X.

(i) State and explain the conditions that must be satisfied for Z to be an IV for X.

(ii) Derive the IV estimator for α and β

(iii) From a sample of 100 observations, the following data are obtained:

$$\sum Y^2 = 350, \sum X^2 = 400, \sum Z^2 = 400$$
$$\sum X = 100, \sum Y = 100, \sum Z = 50,$$
$$\sum XY = 150, \sum ZY = 150, \sum ZX = 200$$

Obtain the IV estimators of α and β.

(iv) What is the significance of the value of R^2_{XZ} for the variance of IV estimator of β? What is the estimated value of R^2_{XZ} in the sample data given in (iii) above?

(b) Suppose $Y_i^* = \alpha + \beta X_i^* + w_i$. If there are measurement errors in both dependent and independent variables so that:

$$Y_i = Y_i^* + u_i \quad and \quad X_i = X_i^* + v_i$$

where Y_i, X_i are observed variables and u_i, v_i are measurement errors in Y_i^* and X_i^* respectively. So, in the observed form, the model is:

$$Y_i = \alpha + \beta(X_i - v_i) + w_i + u_i$$
$$= \alpha + \beta X_i + (w_i + u_i - \beta v_i)$$

Assuming that, $E(w_i) = 0$, $E(w_i^2) = \sigma_w^2$ $Cov(w_i, w_j) = 0$

$E(u_i) = E(v_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma_u^2$, $E(v_i^2) = \sigma_v^2$

$Cov(u_i, v_i) = 0$ $Cov(Y^*, u_i) = 0$ $Cov(X^*, v_i) = 0$ $Cov(v_i, Y^*) = 0$

$Cov(u_i, X^*) = 0$ $Cov(w_i, u_i) = 0$ $Cov(w_i, v_i) = 0$ $Cov(X, w_i) = 0$ $Cov(X^*, w_i) = 0$

(i) Show that in large samples:

$$plim\hat{\beta} = \frac{\beta}{1 + \frac{\sigma_v^2}{\sigma_{X^*}^2}}$$

(ii) As $n \to \infty$, will the estimated β tends towards equality with the true β? What can you say about the nature of bias in $\hat{\beta}$?

(9.5+9.25)

(a) सरल समाश्रयण मॉडल:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$$

पर विचार कीजिए। मान लीजिए कि X व u सहसम्बन्धित हैं। मान लीजिए कि Z, X हेतु एक यांत्रिक चर है।

(i) Z द्वारा X हेतु एक IV होने हेतु आवश्यक शर्तों को लिखिए व समझाइए।

(ii) α व β हेतु IV आकलक व्युत्पन्न कीजिए।

(iii) 100 प्रेक्षणों के एक प्रतिदर्श से निम्नलिखित आँकड़े प्राप्त हुए:

$$\sum Y^2 = 350, \sum X^2 = 400, \sum Z^2 = 400$$
$$\sum X = 100, \sum Y = 100, \sum Z = 50,$$

munotes.in

$\sum XY = 150, \sum ZY = 150, \sum ZX = 200$

α व β के IV आकलक ज्ञात कीजिए।

(iv) β के IV आकलक के प्रसरण हेतु R^2_{XZ} के मान की क्या सार्थकता है? ऊपर भाग (iii) में दिए गए प्रतिदर्श आँकड़ों हेतु R^2_{XZ} का आकलित मान क्या है?

(b) मान लीजिए कि $Y_i^* = \alpha + \beta X_i^* + w_i$. निर्भर व स्वतन्त्र दोनों चरों में मापन त्रुटियाँ हैं, जिससे कि:

$$Y_i = Y_i^* + u_i \quad and \quad X_i = X_i^* + v_i$$

जहाँ Y_i, X_i प्रेक्षित चर हैं तथा u_i, v_i क्रमशः Y_i^* व X_i^* में मापन त्रुटियाँ हैं। अतः, प्रेक्षित चरों के रूप में मॉडल निम्न प्रकार है:

$$Y_i = \alpha + \beta(X_i - v_i) + w_i + u_i$$
$$= \alpha + \beta X_i + (w_i + u_i - \beta v_i)$$

यह मानते हुए कि, $E(w_i) = 0$, $E(w_i^2) = \sigma_w^2$ $Cov(w_i, w_j)=0$

$E(u_i) = E(v_i) = 0$, $E(u_i^2) = \sigma_u^2$, $E(v_i^2) = \sigma_v^2$

$Cov(u_i, v_i)=0$ $Cov(Y^*, u_i)=0$ $Cov(X^*, v_i)=0$ $Cov(v_i, Y^*)=0$

$Cov(u_i, X^*)=0$ $Cov(w_i, u_i)=0$ $Cov(w_i, v_i)=0$ $Cov(X, w_i)=0$ $Cov(X^*, w_i)=0$

(i) दर्शाइए कि बड़े प्रतिदर्शों में: $plim\hat{\beta} = \frac{\beta}{1+\frac{\sigma_v^2}{\sigma_{X^*}^2}}$

(ii) जब $n \to \infty$, तो क्या आकलित β वास्तविक β के साथ बराबरी की ओर प्रवृत्त होता है? आप $\hat{\beta}$ में अभिनति की प्रकृति के बारे में क्या कह सकते हैं?

(9.5+9.25)

munotes.in