

This question paper contains printed pages

Sr. No. Of the Question paper :

Unique Paper Code: 12271202_OC

Name of paper: Mathematical Methods for Economics II

Name of Course: B.A. (Hons.) Economics

Semester : II

Duration: 2 hours

Maximum Marks: 75

Instructions for candidates:

1. There are six questions in all
2. Attempt any four questions
3. All questions carry equal marks
4. Use of simple calculator is allowed
5. Answers may be written in Hindi or English but the same medium should be used throughout the paper

परीक्षार्थियों हेतु अनुदेशः

1. कुल छः प्रश्न हैं।
2. किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
3. सभी प्रश्नों के बराबर अंक हैं।
4. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

5. उत्तर हिन्दी में या अंग्रेजी में दिए जा सकते हैं परन्तु पूरे पेपर में एक ही माध्यम का उपयोग किया जाना चाहिए।

munotes.in

1. Consider the system of equations:

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 1$$

$$x + y + az = 1$$

Write the system in matrix form. Find the values(s) of a for which the system has a unique solution, more than one solution and no solution. What is the degree(s) of freedom if there is more than one solution and what does that imply? In which case(s) the column vectors of the augmented matrix are linearly dependent? What happens to the nature of solutions (for different values of a) if the constant vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ is replaced by another

constant vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

निम्नलिखित समीकरण निकाय पर विचार कीजिए:

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = 1$$

$$x + y + az = 1$$

इस निकाय को मैट्रिक्स रूप में लिखिए। a के वे मान ज्ञात कीजिए जिन हेतु इस निकाय का एक अद्वितीय हल होगा, एक से अधिक हल होंगे तथा कोई हल नहीं होगा। यदि एक से अधिक हल हों तो स्वातन्त्र्य कोटियों (degrees of freedom) की संख्या क्या होगी व इसका क्या तात्पर्य होगा? किन स्थितियों में संवर्द्धित मैट्रिक्स (augmented matrix) के स्तम्भ सदिश रैखिकतः परतन्त्र (linearly dependent) होंगे? यदि स्थिर सदिश $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ को एक

अन्य स्थिर सदिश $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जाए तो हलों की प्रकृति पर क्या

प्रभाव पड़ेगा (a के विभिन्न मानों हेतु)?

2. Consider the following vectors: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculate the

cosine of the angles made between the pairs of vectors a and b , b and c , and c and a .

Also check whether these angles are acute, obtuse or right angle. Can the given vectors span the three dimensional vector space? Now considering a, b, c to be just three points in the three dimensional space: construct the equations of straight lines which passes through b and moves towards a , and the one which passes through c and moves towards a . Then construct an equation of a plane which passes through these three points a, b and c . At which points does this plane intersect with the axes?

निम्नलिखित सदिशों पर विचार कीजिए: $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. सदिश-युग्मों

a व b , b व c , तथा c व a के मध्य निर्मित कोणों की कोज्याओं (cosines) की गणना कीजिए।

यह भी जाँच कीजिए कि क्या ये कोण न्यूनकोण हैं, अधिक कोण हैं या समकोण हैं।

क्या दिए गए सदिश त्रिविमीय सदिश-समष्टि की रचना (span) सकते हैं? अब, a, b, c

को त्रिविमीय समष्टि में मात्र तीन बिन्दु लेते हुए उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो b से

गुजरते हुए a , की ओर जाती है तथा जो c से गुजरते हुए a की ओर जाती है। इसके बाद

ऐसे समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो इन तीन बिन्दुओं a, b व c से गुजरता है।

यह समतल अक्षों को किन बिन्दुओं पर प्रतिच्छेदित (intersect) करता है?

3. Consider the function: $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$. Find and sketch the domain of the function.

Draw the level curve of this function at level $k = 2$. Is this function homothetic? Verify Euler's theorem if possible. Find the equation of the tangent plane at the point $(x_0, y_0) = (1, 0)$. From the same point find the direction in which the value of the function increases most rapidly. What is the maximal rate of increase? What is the approximate change in the value of the function if it moves from the given point towards the point $(3, 4)$ by one unit?

फलन: $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ पर विचार कीजिए। इस फलन के परास (domain) को ज्ञात कीजिए व आरेखित कीजिए। इस फलन के स्तर $k = 2$ पर स्तर वक्र (level curve) को आरेखित कीजिए। क्या यह फलन होमोथेटिक (homothetic) है? यदि सम्भव हो तो ओयलर के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। बिन्दु $(x_0, y_0) = (1, 0)$ पर स्पर्शी समतल (tangent plane) का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसी बिन्दु से वह दिशा ज्ञात कीजिए जिसमें इस फलन का मान सर्वाधिक तेजी से बढ़ता है। वृद्धि की सर्वाधिक दर क्या है? यदि दिए गए बिन्दु से बिन्दु $(3, 4)$ की दिशा में एक इकाई चलने पर फलन के मान में सन्निकट (approximate) परिवर्तन क्या होगा?

4. Consider the function: $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$; $(x, y > 0)$. Find the equation of the tangent at a specific point on the level curve $f(x, y) = 1$. Find the marginal rate of substitution between y and x . Find the elasticity of substitution between y and x .

What is its geometric interpretation? Mathematically check whether the given function is concave / convex. Is the concavity / convexity strict? Geometrically check whether the function is quasi-concave / quasi-convex. Calculate the approximate value of $f(1.03, 1.01)$.

फलन: $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$; $(x, y > 0)$ पर विचार कीजिए। स्तर वक्र $f(x, y) = 1$ के एक विशिष्ट बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। y व x के मध्य प्रतिस्थापन की सीमान्त दर (marginal rate of substitution) ज्ञात कीजिए। y व x के मध्य प्रतिस्थापन की लोच (elasticity of substitution) ज्ञात कीजिए। इसकी ज्यामितीय व्याख्या क्या है? यह फलन अवतल (concave) है या उत्तल (convex), इस बात की गणितीय तरीके से जाँच कीजिए। क्या यह अवतलता/ उत्तलता सख्त (strict) है? ज्यामितीय तौर पर जाँच कीजिए कि क्या यह फलन अर्द्ध-अवतल (quasi-concave) है या अर्द्ध-उत्तल (quasi-convex)। $f(1.03, 1.01)$ का सन्निकट मान ज्ञात कीजिए।

5. Examine the following function for maxima, minima or saddle points:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 3y^2 + 9x + 10.$$

Now find the global extreme points of the following function:

$$g(x, y) = 3x + 2y - (x + y)^2 \text{ on the closed and bounded set } S \text{ where}$$

$$S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, y \leq x + 2\}.$$

निम्नलिखित फलनों की उच्चिष्ठों (maxima), निम्निष्ठों (minima) या काठी बिन्दुओं (saddle points) हेतु जाँच कीजिए:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 3y^2 + 9x + 10.$$

अब निम्नलिखित फलन के वैश्विक चरम बिन्दुओं (global extreme points) को ज्ञात कीजिए:

$g(x, y) = 3x + 2y - (x + y)^2$, बन्द (closed) व परिवद्ध (bounded) समुच्चय S पर, जहाँ

$S = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, y \leq x + 2\}$.

6. A consumer has a utility function $U(x, y) = x + 3\sqrt{y}$. If the prices of good x and y are P_x and P_y respectively and income of the consumer is equal to m , derive the demand functions of the consumer using the Lagrangean technique. Check the second order conditions. Explain the solution geometrically by drawing appropriate level curves for $U(x, y)$ together with the graph of constraint function. Find the impact of a change in m on equilibrium values of x, y and optimal utility.

एक उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U(x, y) = x + 3\sqrt{y}$ है। यदि वस्तुओं x व y की कीमतें क्रमशः P_x व P_y हैं तथा उपभोक्ता की आय m है, तो लैग्रांजियन विधि की सहायता से उपभोक्ता का मांग फलन व्युत्पन्न कीजिए। द्वितीय क्रम की शर्तों की जाँच कीजिए। $U(x, y)$ हेतु उपयुक्त स्तर वक्रों को प्रतिबन्ध फलन के साथ आरेखित करते हुए उपरोक्त हल को ज्यामितीय रूप से भी समझाइए। m में परिवर्तन के परिणामस्वरूप x, y के सन्तुलन अवस्था स्तरों तथा इष्टतम उपयोगिता पर होने वाले प्रभावों को भी ज्ञात कीजिए।