

This question paper contains 16+3 printed pages]

13.12.18 (M)

Roll No.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

S. No. of Question Paper : 7447

Unique Paper Code : 12271102

IC

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics-I

Name of the Course : B.A. (Hons.) Economics  
[CBCS C-2, Core]

Semester : I

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 75

(Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.)

Note :— Answers may be written *either* in English *or* in Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

टिप्पणी : इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिन्दी किसी एक भाषा में दीजिए; लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

There are *six* questions in all.

*All* questions are compulsory.

A simple calculator can be used.

इस प्रश्न-पत्र में कुल छः प्रश्न हैं।

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

P.T.O.

1. Answer any two of the following :

2×5=10

- (A) Determine the domain and range of the following inequality :

$$y = f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)] < 0.$$

- (B) Find all  $x$  such that :

(i)  $y = |-4 - 2x| \geq -2$

(ii)  $y = \frac{(x - 0.5)(\ln(1 - x))}{x^{3/2}} > 0.$

- (C) Determine the direction of logical conclusion ( $P \Rightarrow Q$  or  $Q \Rightarrow P$  or  $P \Rightarrow Q$ ) in case of the following propositions :

- (i)  $P : f(x)$  has a local extremum at  $x = a$ , where  $f'(a)$  exists.

$Q : x = a$  is a stationary point of  $f(x)$ , i.e.  $f'(a) = 0.$

- (ii)  $P : x$  satisfies the inequality :  $\frac{(x + 5)}{(1 - x)} \geq 0$

$Q : x$  lies in the open interval from  $-5$  to  $1.$

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

- (A) निम्नलिखित असमिका का परास (domain) व परिसर (range) ज्ञात कीजिए :

$$y = f(x) = \ln[\ln(e^x - 1)] < 0.$$

- (B)  $x$  के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए :

(i)  $y = |-4 - 2x| \geq -2$

(ii)  $y = \frac{(x - 0.5)(\ln(1 - x))}{x^{3/2}} > 0.$

- (C) निम्नलिखित कथनों हेतु तार्किक निष्कर्ष (logical conclusion) ( $P \Rightarrow Q$  or  $Q \Rightarrow P$  or  $P \Rightarrow Q$ ) की दिशा ज्ञात कीजिए :

- (i)  $P : x = a$  पर  $f(x)$  का एक ऐसा स्थानीय चरम बिन्दु (local extremum) है जहाँ  $f'(a)$  विद्यमान है।

$Q : x = a, f(x)$  का एक स्थिर बिन्दु (stationary point) है, अर्थात्  $f'(a) = 0.$

- (ii)  $P : x$ , असमिका  $\frac{(x + 5)}{(1 - x)} \geq 0$  को सन्तुष्ट करता है।

$Q : x, -5$  से  $1$  तक के खुले अन्तराल में स्थित है।



2. Answer any *three* of the following :

$$3 \times 5 = 15$$

(A) Draw in the same graph the regions represented by the following two sets :

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$$

$$T = \{(x, y) : xy \geq 12\}$$

In each case, plot coordinates of all points where the graphs intersect each other or intersect the coordinate axes. Determine if sets S and T are disjoint.

(B) For the function defined as follows :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x}, & 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{4} + 1, & x > 4 \end{cases}$$

Plot the function. Verify continuity and differentiability of the function at  $x = 2$  and  $x = 4$ .

(C) Find the asymptotes of the rectangular hyperbola :

$$y = \frac{(k - 2)x + k - 4}{(k - 6)x + k - 3}$$

given that the asymptotes intersect at a point that lies on the straight line  $y = 2x - 7$ .

(D) Harish runs a 'rent a bicycle' kiosk at the university metro station. He currently charges a price of Rs. 10 per bicycle at which the average demand is of 100 bicycles per day. An industry expert estimates that, each time the rental price increases by Rs. 5 per bicycle, the average demand drops by ten bicycles per day. Express the rental income as a quadratic function and use the method of 'completing the squares' to determine (i) the rental price that maximises your income from renting bicycles and (ii) maximum income.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(A) निम्नलिखित दो समुच्चयों के द्वारा निरूपित क्षेत्रों को एक ही चित्र में आरेखित कीजिए :

$$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 25\}$$

$$T = \{(x, y) : xy \geq 12\}$$

प्रत्येक स्थिति में उन सभी बिन्दुओं के निर्देशांकों (coordinates) को भी चिह्नित कीजिए जिन पर ये आरेख एक दूसरे को प्रतिच्छेदित (intersect) करते हैं या निर्देशांक अक्षों (coordinate axes) को प्रतिच्छेदित करते हैं। ज्ञात कीजिए कि क्या समुच्चय S व T अलग (disjoint) हैं।



- (B) एक फलन जो कि निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x}, & 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{4} + 1, & x > 4 \end{cases}$$

उसे आरेखित कीजिए। इस फलन की  $x = 2$  तथा  $x = 4$  पर संततता (continuity) तथा अवकलनीयता (differentiability) को सत्यापित कीजिए।

- (C) आयताकार अतिपरवलय (rectangular hyperbola) :

$$y = \frac{(k-2)x + k - 4}{(k-6)x + k - 3}$$

की अनन्तस्पर्शियाँ (asymptotes) ज्ञात कीजिए, यदि यह दिया हुआ है कि ये अनन्तस्पर्शियाँ सरल  $y = 2x - 7$  पर स्थित एक बिन्दु पर प्रतिच्छेदित करती हैं।

- (D) हरीश, विश्वविद्यालय मेट्रो स्टेशन पर एक 'साइकिल किराए पर लें' कियोस्क चलाते हैं। अभी वह प्रति साइकिल 10 रु. लेते हैं जिस पर औसत मांग प्रतिदिन 100 साइकिलों की है। एक उद्योग विशेषज्ञ का आकलन है कि जब

भी किराया 5 रु. बढ़ता है, औसत मांग में 10 साइकिल प्रतिदिन की गिरावट आती है। किराए से होने वाली आय को एक द्विघात फलन (quadratic function) के रूप में व्यक्त कीजिए तथा 'वर्ग पूर्ण करने' की विधि की सहायता से (i) साइकिलों को किराए पर देने से होने वाली आय को अधिकतम करने वाला किराया तथा (ii) अधिकतम आय को ज्ञात कीजिए।

3. Answer any three of the following :

3×5=15

- (A) A geometric series has its second term  $a_2 = -48$  and fifth term  $a_5 = 6$ .

- (i) Find the first term and common ratio of the series.  
(ii) Find the sum to infinity of the series.  
(iii) Show that the magnitude of the difference between the sum of first  $n$  terms of the series and its sum to infinity is given by  $2^6 - n$ .

- (B) Given the following approximation for small values of  $x$  :

$$(1 + ax)^n \approx 1 - 24x + 270x^2,$$



Where  $n$  is an integer greater than 1 :

(i) Find the values of  $n$  and  $a$ .

(ii) Use the values of  $n$  and  $a$  and a suitable value of  $x$  to obtain an approximate value of  $(0.9985)^{16}$ .

(C) Evaluate the following limits :

$$(i) \quad y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^5 + 1}{5^x + x^4} \right)$$

$$(ii) \quad y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{n^2 + 6}}{8n} \right)$$

(D) Suppose in a given city with  $n$  individuals, total market demand  $X = \sum_{i=1}^n x_i$ , where  $x_i$  is the demand of the  $i$ th consumer. The inverse demand function is given by  $x_i = f(P)$ , where  $P$  is the market price. If half the consumers with 75% share in total demand, have price elasticity of demand  $|E_1| = 2$  and the remaining have price elasticity of demand  $|E_2| = 1.5$ , estimate the price elasticity of demand of all consumers taken together.

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(A) एक ज्यामितीय श्रृंखला (geometric series) का दूसरा पद  $a_2 = -48$  तथा पाँचवाँ पद  $a_5 = 6$  है।

(i) इस श्रृंखला का पहला पद तथा सार्व अनुपात (common ratio) ज्ञात कीजिए।

(ii) इस श्रृंखला का अनन्त तक योगफल ज्ञात कीजिए।

(iii) दर्शाइए कि इस श्रृंखला के प्रथम  $n$  पदों के योगफल तथा अनन्त पदों के योगफल के मध्य अन्तर का परिमाण  $2^6 - n$  है।

(B)  $x$  के छोटे मानों हेतु निम्नलिखित सन्निकटन (approximation) दिया हुआ है :

$$(1 + ax)^n \approx 1 - 24x + 270x^2,$$

जहाँ  $n$ , 1 से बड़ा एक पूर्णांक (integer) है :

(i)  $n$  व  $a$  के मान ज्ञात कीजिए।

(ii)  $n$  व  $a$  के मानों तथा  $x$  के एक उपयुक्त मान की सहायता से  $(0.9985)^{16}$  का सन्निकट मान (approximate value) ज्ञात कीजिए।



(C) निम्नलिखित सीमाओं के मान ज्ञात कीजिए :

$$(i) \quad y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^5 + 1}{5^x + x^4} \right)$$

$$(ii) \quad y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\sqrt{n^2 + 6}}{8n} \right)$$

(D) मान लीजिए कि  $n$  व्यक्तियों वाले एक शहर में कुल बाजार मांग  $X = \sum_{i=1}^n x_i$ , जहाँ  $x_i$   $i$  वें उपभोक्ता की मांग है। प्रतिलोम (inverse) मांग फलन  $x_i = f(P)$  है, जहाँ  $P$  बाजार कीमत है। यदि आधे उपभोक्ता जिनका कुल मांग में 75% अंश है, की मांग की कीमत लोच  $|E_1| = 2$  है तथा शेष उपभोक्ताओं की मांग की कीमत लोच  $|E_2| = 1.5$  है, तो सभी उपभोक्ताओं की मांग की समेकित कीमत लोच (elasticity of demand of all consumers taken together) ज्ञात कीजिए।

4. Answer any three of the following :

3×5=15

(A) Graph the following function and verify that it is one-to-one :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x); & 0 < x < 1 \\ x - 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

Find the inverse function  $f^{-1}(x)$  and identify its domain and range. Draw  $f^{-1}(x)$  in the same graph and comment on the nature of symmetry in graphs of  $f(x)$  and  $f^{-1}(x)$ . Plot the coordinates of all points where the graphs intersect the coordinate axes.

(B) The Coconut Farmers' Association in India estimated that the value  $V(t)$  of coconut produce (in lakh rupees) increases over time according to the following function :

$$V(t) = a^{\ln \sqrt{bt+c}},$$

where  $a, b, c > 0$ ,  $a > e$  and  $t$  is time for coconuts to ripen.

Assuming that the discount rate is  $r$  :

(i) Find optimal time  $t^*$  for the producers to pick coconuts such that the present value of the harvest is maximized (second order condition for optimum need not be verified).

(ii) How does a change in discount rate change the optimal time  $t^*$  of picking the coconuts ?



(C) Given the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7 - (16)^{1/x}}{1 + (16)^{1/x}} & \text{if } x \neq 0; \\ 7 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

Prove that there is a point in the open interval (2, 4) in which the function  $f(x)$  has a value of 1.

(D) If the function :

$$f(x) = axe^{-bx}, \quad a > 0$$

has a local maximum at point (2, 10), then find  $a$  and  $b$ .

Find the point of inflection of  $f(x)$ .

निम्नलिखित में से किन्हीं तीन के उत्तर दीजिए :

(A) निम्नलिखित फलन का आरेख बनाइए तथा सत्यापित कीजिए

कि यह एक-से-एक (one-to-one) है :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x); & 0 < x < 1 \\ x - 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

इसका प्रतिलोम (inverse) फलन  $f^{-1}(x)$  ज्ञात कीजिए तथा इसका परास व परिसर ज्ञात कीजिए।  $f^{-1}(x)$  को भी उसी रेखाचित्र में आरेखित कीजिए तथा  $f(x)$  के  $f^{-1}(x)$  आरेखों में सममितता (symmetry) की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए। उन बिन्दुओं के निर्देशांकों को चिह्नित कीजिए जहाँ ये आरेख निर्देशांक अक्षों को प्रतिच्छेदित करते हैं।

(B) भारतीय नारियल कृषक संघ का आकलन है कि नारियल उत्पाद का मूल्य (लाख रु. में)  $V(t)$ , समय के साथ निम्नलिखित फलन के अनुसार बढ़ता है :

$$V(t) = a^{\ln \sqrt{bt + c}},$$

जहाँ  $a, b, c > 0$ ,  $a > e$  तथा  $t$  नारियलों को पकने में लगने वाला समय है।

यह मानते हुए कि बट्टे की दर (discount rate)  $r$  है :

(i) उत्पादकों के द्वारा नारियलों को तोड़ने का वह इष्टतम समय  $t^*$  ज्ञात कीजिए जिसके लिए उपज का वर्तमान मूल्य (present value) अधिकतम हो (इष्टतमीकरण



हेतु द्वितीय क्रम (second order) की शर्त को सत्यापित करने की आवश्यकता नहीं है।

- (ii) बट्टे की दर में परिवर्तन, नारियलों को तोड़ने के इष्टतम समय  $t^*$  को किस प्रकार से परिवर्तित करता है ?

(C) फलन :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{7 - (16)^{1/x}}{1 + (16)^{1/x}} & \text{if } x \neq 0; \\ 7 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$

हेतु सिद्ध कीजिए कि खुले अन्तराल  $(2, 4)$  में एक ऐसा बिन्दु है जिस पर फलन  $f(x)$  का मान 1 है।

(D) यदि फलन :

$$f(x) = axe^{-bx}, \quad a > 0$$

का बिन्दु  $(2, 10)$  पर एक स्थानीय उच्चिष्ठ (local maximum)

है तो  $a$  व  $b$  के मान ज्ञात कीजिए।  $f(x)$  का मोड़ बिन्दु (point of inflection) ज्ञात कीजिए।

5. Answer any two of the following :

2×6=12

(A) Consider the function  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 24$ , defined for all  $x \in \mathbf{R}$ .

- (i) Find the stationary point(s) of  $y = f(x)$  and determine whether each stationary point is a maximum or minimum point.

- (ii) Plot the curve  $y = f(x)$  depicting clearly the stationary points and the extreme values attained at these points.

- (iii) State the set of values of  $k$  for which the equation  $f(x) = k$  has three solutions.

(B) Given the function  $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$  defined over the interval  $[-1, 1]$  :

- (i) Find the global maximum and minimum values of  $f(x)$ .

- (ii) Find the interval(s) in which the function increases and/or decreases.



(iii) Find the interval(s) in which the function is concave and/or convex.

(C) A function  $f(x)$  is known to be continuous and differentiable for all  $x$ . Find  $f'(x)$  where :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \left[ t^3 (2t - 3)^2 (t + 1)^5 (t - 7) \right] dt.$$

Find all stationary points of  $f(x)$  and classify each as a local maximum, a local minimum, or neither.

निम्नलिखित में से किन्हीं दो के उत्तर दीजिए :

(A) सभी  $x \in \mathbb{R}$  हेतु परिभाषित फलन  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 24$  पर विचार कीजिए :

- $y = f(x)$  के स्थिर बिन्दु(ओं) को ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक स्थिर बिन्दु हेतु ज्ञात कीजिए कि वह उच्चिष्ठ (maximum) है या निम्निष्ठ (minimum)।
- सभी स्थिर बिन्दुओं तथा उन पर प्राप्त चरम बिन्दुओं को दर्शाते हुए वक्र  $y = f(x)$  को आरेखित कीजिए।
- $k$  के उन मानों का समुच्चय बताइए जिनके लिए समीकरण  $f(x) = k$  के तीन हल हैं।

(B) अन्तराल  $[-1, 1]$  पर परिभाषित फलन  $f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$

हेतु :

- $f(x)$  के वैश्विक (global) अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।
- उन अन्तरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें यह फलन वर्द्धमान (increasing) है तथा/अथवा ह्रासमान (decreasing) है।
- उन अन्तरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें यह फलन अवतल (concave) है तथा/अथवा उत्तल (convex) है।

(C) एक फलन  $f(x)$  के बारे में यह ज्ञात है कि यह सभी  $x$  हेतु संतत तथा अवकलनीय है।  $f'(x)$  ज्ञात कीजिए जहाँ :

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \left[ t^3 (2t - 3)^2 (t + 1)^5 (t - 7) \right] dt.$$

$f(x)$  के सभी स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिए तथा इनमें से प्रत्येक को स्थानीय उच्चिष्ठ, स्थानीय निम्निष्ठ या इसमें से कोई नहीं के तौर पर वर्गीकृत कीजिए।



6. Answer all the questions :

2×4=8

(A) Find the area of the region bounded vertically by  $y = x^2$  and  $y = 6 + x$  and bounded horizontally by  $x = 0$  and  $x = 5$ .

(B) Consider the two-sector model :

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = 0.75Y_{t-1} + 400$$

$$I_t = 200$$

(i) Find the difference equation in  $Y_t$  generated by this model.

(ii) Solve the difference equation for  $Y_t$  and determine whether the solution path of  $Y_t$  is convergent or divergent.

(iii) Find the value of  $C_2$  given that  $Y_0 = 4,000$ .

सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(A) क्षेत्रफल के क्षेत्र ज्ञात कीजिए जो  $y = x^2$  एवं  $y = 6 + x$  द्वारा ऊर्ध्वाधर परिसीमित एवं  $x = 0$  एवं  $x = 5$  द्वारा समानान्तर परिसीमित है।

(B) निम्नलिखित द्विक्षेत्र मॉडल पर विचार कीजिए :

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = 0.75Y_{t-1} + 400$$

$$I_t = 200$$

(i) इस मॉडल द्वारा  $Y_t$  में जनित अन्तर समीकरण ज्ञात कीजिए।

(ii) इस अन्तर समीकरण को  $Y_t$  हेतु हल कीजिए तथा ज्ञात कीजिए कि  $Y_t$  का हल पथ (solution path) अभिसारी (convergent) है या अपसारी (divergent)।

(iii)  $C_2$  का मान ज्ञात कीजिए यदि यह दिया हुआ है कि  $Y_0 = 4,000$ ।