

187

सांख्यिकी (प्रश्नपत्र II)
STATISTICS (Paper II)

समय : तीन घण्टे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्नपत्र के लिए निर्देश

उत्तर लिखना शुरू करने से पहले कृपया निम्न निर्देशों में से प्रत्येक को ध्यानपूर्वक पढ़ लीजिए।

आठ प्रश्नों को दो खंडों में बांटा गया है और हिन्दी तथा अंग्रेजी में छापा गया है।

उम्मीदवार को कुल पांच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 एवं 5 अनिवार्य हैं, बाकी में से तीन का उत्तर प्रत्येक खंड से न्यूनतम एक प्रश्न लेते हुए करना है।

प्रश्न/अंश के अंक उस के सामने दिये गए हैं।

उत्तर उसी माध्यम में दिये जाने हैं जो एडमिशन सर्टिफिकेट में अनुमत है। उसका उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (QCA) बुकलेट में मुखपृष्ठ के निर्धारित स्थान पर करना जरूरी है। अनुमत माध्यम से भिन्न माध्यम में दिये उत्तरों पर कोई अंक नहीं दिया जाएगा।

किसी प्रश्न का उत्तर देने के लिए जहां जरूरत हो, आंकड़े मान लें, उस को स्पष्ट अवश्य सूचित कर दें।

अंकन/चित्र, जहां आवश्यक हो, प्रश्न का उत्तर देने की जगह पर ही अंकित किये जायें।

सभी प्रश्नों को क्रमानुवय में गिना जायेगा। प्रश्न आंशिक रूप में किया गया, तो भी गिना जायेगा यदि उसे नहीं काट दिया गया हो। कोई खाली पन्ना या अंश यदि उत्तर पुस्तिका में छोड़ा गया है, उसे स्पष्टतः अवश्य काट दें।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions.

There are EIGHT questions divided into two SECTIONS and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question No. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE from each section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Wherever any assumptions are made for answering a question, they must be clearly indicated.

Charts/Figures, wherever required, shall be drawn in the space provided for answering the question itself.

Attempts of questions shall be counted in chronological order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the answer book must be clearly struck off.

खण्ड 'क'

1.(क) किसी 'क्यूसम' (CUSUM) नियंत्रण चार्ट का वर्णन कीजिए। इस चार्ट की तुलना श्यूहार्ट चार्ट के साथ उनके निष्पादन के संदर्भ में कीजिए। क्यूसम चार्टों में V-मास्क किस प्रकार उपयोगी होता है ? 10

1.(ख) मान लीजिए $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ प्रारम्भिक प्रायिकता $q_a = \frac{2}{5}, q_b = \frac{1}{5}, q_c = \frac{2}{5}$ सहित सतह अवस्था $\{a, b, c\}$ पर एक मार्कोव श्रृंखला और एक-स्टेप ट्रांजिशन प्रायिकता आव्यूह $((p_{ij}))$ जो निम्नलिखित से दत्त है

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

अभिकलन कीजिये

(i) $P_r[X_1 = b, X_2 = b, X_3 = b, X_4 = a, X_5 = c | X_0 = a]$

(ii) $P_r[X_1 = b, X_2 = b, X_3 = a]$

10

1.(ग) काल खण्ड-वर्जन के मामलों में घातीय बंटन के प्राचल के आकलन की विवेचना कीजिए। 10

1.(घ) एक एकल सर्वर पंक्ति प्रणाली के लिये, प्वायसां तरीके के अनुसार, 2 ग्राहक प्रति घंटे की दर से ग्राहकों का आगमन है। सेवा-समय, घातीय बंटन के अनुसार है जिसका औसत सेवा-समय प्रति ग्राहक 12 मिनट है। ग्राहकों की संख्या के लिए स्थायी अवस्था प्रायिकता बंटन (p_n) , n ग्राहक के लिये नीचे दिया गया है :

n	0	1	2	3	4	5	6 और ऊपर
p_n	0.08	0.1	0.4	0.2	0.2	0.02	0

ज्ञात कीजिए

(i) ग्राहकों की संभावित संख्या तंत्र में तथा पंक्ति में।

(ii) माध्य इन्तजार समय, इस तंत्र में तथा पंक्ति में।

10

1.(ङ) एक दो-व्यक्ति शून्य-योग खेल का वर्णन कीजिये तथा मिनी-मैक्स, मैक्स-मिन की व्याख्या कीजिये और खेल के निवल मानों को बताइये। 10

2.(क) गुणों के लिये अनुक्रमिक प्रतिचयन योजना की अवधारणा को समझाइये तथा निम्नलिखित परिकल्पना के परीक्षण के लिए एक आनुक्रमिक प्रतिचयन योजना के औसत प्रतिदर्श संख्या फलन को प्राप्त कीजिये :

$H_0: \beta = \beta_0$, वैकल्पिक परिकल्पना के विरुद्ध

$H_1: \beta = \beta_1$, घनत्व फलन $f(x, \beta)$ वाले एक समष्टि से लिये गये प्रतिदर्श में।

15

2.(ख) एक दो-व्यक्ति शून्य-योग खेल में किसी पल्याण-विन्दु (सैडल प्वाइंट) के अस्तित्व के लिये एक आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त को बताइये तथा उसको सिद्ध कीजिए।

निम्नलिखित खेल के मान को प्राप्त कीजिए :

खिलाड़ी B

खिलाड़ी A $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 8 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

20

2.(ग) निम्नलिखित पारिभाषिक शब्दों की परिभाषा दीजिए एवं समझाइये :

- विश्वसनीयता फलन
- श्रेणी तंत्र की विश्वसनीयता
- समांतर तंत्र की विश्वसनीयता

एक घटक की माध्य आयु 100 घंटे है। यदि आप 200 घंटे माध्य आयु का एक समांतर निकाय बनाना चाहते हैं तो एक स्थिर जोखिम माडल को मानते हुए, कितने घटकों की आवश्यकता होगी ? 15

3.(क) एक (M/M/1) : (∞/FIFO) पंक्ति प्रणाली के लिए स्थायी अवस्था अन्तर समीकरण का सैट व्युत्पन्न कीजिए तथा इसी से प्रणाली के हल को प्राप्त कीजिए। एक सुपर बाजार में, ग्राहकों के पहुँचने की औसत दर प्रत्येक 30 मिनट में 5 है। कैश डेस्क पर ग्राहकों के खरीदारियों की सूचीबनाने तथा उनका परिकलन करने का औसत समय 4.5 मिनट है तथा यह समय चरघातांकीतः (एक्सपोनेंसियली) बँटित है।

(i) कैश डेस्क पर सेवा प्राप्त करने के लिए ग्राहक कितने समय तक इन्तजार करने की अपेक्षा रखेगा ?

(ii) कैशियर के काम करते, रहने की प्रायिकता क्या है ? 15

3.(ख) उन सिद्धान्तों की विवेचना कीजिए जिनपर नियंत्रण चार्ट आधारित होता है। सांख्यिकीय गुणता नियंत्रण में 3-σ सीमाओं के प्रयोग के पीछे क्या अवधारणा है ?

हवाई जहाज़ के फिटिंग्स में धागों के पिच दूरी के मापों पर नियंत्रण को समान अन्तराल पर मापी गयी 5 लगातार इकाइयों से जांच किया जाता है। ऐसे 8 प्रतिदर्श नीचे दिये गये हैं।

(मानों को 0.0001 इंच की इकाइयों में दर्शाया गया है)

प्रतिदर्श	5 मर्दों के प्रत्येक पर प्रति घंटे पर मापन				
1	46	45	44	43	42
2	41	41	45	42	41
3	40	40	43	42	40
4	42	43	43	42	45
5	42	44	47	47	45
6	39	46	45	42	41
7	46	44	41	40	45
8	40	45	43	40	39

$\bar{X}-R$ चार्ट का निर्माण कीजिए तथा प्रक्रम नियंत्रण पर टिप्पणी कीजिए। 20

3.(ग) सतत पुनर्भरण इकाई के साथ तात्क्षणिक प्रसंभाव्य मांग वाले मालसूची माडल की विवेचना कीजिए तथा अनुकूलतम मालसूची स्तर को प्राप्त करने के लिए शर्त को प्राप्त कीजिये। 15

4.(क) शब्द 'संवेदनशीलता विश्लेषण' से आप क्या समझते हैं ? $AX=b$ प्रतिबन्धों के समुच्चय के साथ एक रेखीय प्रोग्रामन समस्या में दिए b में संसाधन परिवर्तन के प्रभाव की विवेचना कीजिए।

निम्नलिखित समस्या

अधिकतमोकरण कीजिए

$$Z = -x_1 + 2x_2 - x_3$$

बशर्ते कि

$$3x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6$$

$$x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

में b_2 घटक में असतत् परिवर्तन के प्रभाव की विवेचना कीजिए ताकि वर्तमान अनुकूलतम हल की अनुकूलतमता बरकरार रहे। 20

4.(ख) शब्दों की व्याख्या कीजिए :

(i) स्वीकार गुणता स्तर

(ii) LTPD

(iii) उपोभोक्ता का जोखिम

(iv) उत्पादक का जोखिम

(v) OC वक्र

10

- 4.(ग) मान लीजिये कि ग्राहक और बेचने वाले मानते हैं कि अगर किसी समूह (लाट) में 10% की खराब दर है तो ठीक है। प्रतिदर्श योजना ($N=20, n=5, c=1$) के लिए, अगर एक लाट (समूह), जिसमें 10% खराब हैं, के स्वीकार किए जाने की प्रायिकता प्राप्त कीजिए। अगर प्रतिदर्श योजना ($N=100, n=5, c=1$) हो, तो इसी तरह इसकी भी प्रायिकता निकालिए। इन दोनों में से कौन सी प्रतिदर्श योजना ज्यादा अच्छी प्रतीत होती है और क्यों? 20

खण्ड 'ख'

- 5.(क) मान लिया $\epsilon_t, \epsilon_{t+1}, \dots$ और ξ स्वतंत्र चर हैं, जिनका शून्य माध्य और एकक प्रसरण है। मान लिया $U_t = a\xi + \epsilon_t$, $-\infty < t < \infty$ तो दिखाइये कि (कोरिलोग्राम) क्रमिक सह सम्बन्ध

$$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \frac{a^2}{1+a^2} \text{ के साथ प्रक्रम अचल है।} \quad 10$$

- 5.(ख) परीक्षण प्राप्तांकों के प्रामाण्य का क्या तात्पर्य है? आप प्रामाण्य का परिकलन किस प्रकार करेंगे? साथ में विश्वसनीयता की संकल्पना के साथ उसकी तुलना कीजिए। 10

- 5.(ग) सूचकांक को परिभाषित कीजिए। इनके उपयोगों को तथा परिसीमाओं को बताइये। 10

- 5.(घ) वृद्धिघात वक्र द्वारा फिटिंग प्रवृत्ति के तरीके का वर्णन कीजिए। 10

- 5.(ङ) क्यों सकल जनन दर (GRR) तथा निवल जनन दर (NRR) उर्वरता के परिष्कृत माप समझे जाते हैं? यह मानते हुए कि मादा शिशुओं का कुल जन्म के साथ अनुपात 48:8 प्रतिशत है, निम्नलिखित डाटा के लिए, सकल जनन दर का अभिकलन कीजिए : 10

आयु वर्ग	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
प्रति हजार महिला उर्वरता दर	19	173	253	201	157	67	9

- 6.(क) निम्नलिखित जीवन सारिणी में खाली स्थानों की पूर्ति कीजिए : 20

आयु (वर्षों में)	l_x	d_x	q_x	P_x	L_x	T_x	E_x°
4	95000	500	?	?	?	4850300	?
5	?	400	?	?	?	?	?

- 6.(ख) नीचे सूचकांकों के दो सैट दिये गये हैं जिसमें एक का आधार 1960 है। और दूसरे का आधार 1970 है :

वर्ष	1960	1961	1966	1968	1970	1971	1972	1973
पुराना सूचकांक	100	110	115	125	150	...	...	...
नया सूचकांक	...	...	...	...	100	105	120	130

नये श्रेणी को पुराने श्रेणी में सम्बन्धन कीजिए इस प्रकार कि 1960 से सतत श्रेणी हो जाय। पुराने श्रेणी को भी नये श्रेणी में सम्बन्धन कीजिए कि 1960 से सतत श्रेणी हो जाय। 15

- 6.(ग) नीचे दो जिलों में मृत्यु से सम्बन्धित आँकड़े दिये गये हैं। दिये गये आँकड़ों के आधार पर, मानकीकृत मृत्युदरों का परिकलन कीजिए। अपने विचार व्यक्त कीजिए। 15

उम्र परास	जनसंख्या (0-0)		मृत्यु की संख्या (0-0)		1000 मानक का उम्र बंटन
	जिला A	जिला B	जिला A	जिला B	
0-10	2000	1000	50	20	206
10-55	7000	3000	75	30	583
55 एवं अधिक	1000	2000	25	40	211

- 7.(क) रैखिक युगपत् समीकरणों के निकाय के आकलन के लिए आप किस प्रकार निम्नलिखित आकलन विधियों का उपयोग करेंगे तथा क्यों ?

(i) अप्रत्यक्ष न्यूनतम वर्ग विधि (ILS)

(ii) द्वि-चरण न्यूनतम वर्ग विधि (2 SLS)

- 7.(ख) बुद्धि-लब्धि (आई. क्यू.) से आप क्या समझते हैं ? इसे मापने की कार्यविधि और परीक्षण बताइये। 20

- 7.(ग) किसी काल श्रेणी के ARIMA (p, d, q) निरूपण को स्पष्ट कीजिए। 15

एक स्व-समाश्रयी योजना $X_{t+1} = aX_t + b + \epsilon_{t+1}$ के लिए, दिखाइये कि सह-सम्बन्ध चित्र $\gamma_k = a^k$ से दिया जाता है, जहाँ k क्रमिक सह-सम्बन्ध के पद को दर्शाता है। साथ ही दिखाइये कि सह-सम्बन्ध चित्र $0 < a < 1$ के लिए घातीय रूप से घटता है। 15

- 8.(क) सूचकांकों के समय व्युत्क्रमण तथा कारक व्युत्क्रमण परीक्षणों को समझाइये। जाँच कीजिए कि क्या लैस्पेयरे तथा पाशे के सूचकांक इन परीक्षणों को सन्तुष्ट करते हैं। 15

- 8.(ख) स्थिर तथा अर्ध-स्थिर जनसंख्याओं से आप क्या समझते हैं ? स्थिर जनसंख्या सिद्धान्त के मूलभूत कल्पनाओं को बताते हुए, तीन बुनियादी समीकरणों को प्राप्त कीजिए, जो अंतरस्थ वृद्धिदर, जन्मदर तथा जनसंख्या के आयु बंटन के बारे में जानकारी प्रदान करता है। 20

- 8.(ग) निम्नलिखित शब्दों को समझाइये :

(i) योग्यता के एक फलन के रूप में, यौगिक स्कोर

(ii) शततमक स्कोर

(iii) जैड स्कोर (Z स्कोर)

बताइये कि परीक्षण स्कोरों के एक बारम्बारता सारिणी के रूप में दिये होने पर T-स्कोरों को कैसे प्राप्त किया जाता है। 15

SECTION 'A'

- 1.(a) Describe a CUSUM control chart. Compare this chart with a Shewhart chart with respect to performance. How is a V-mask useful in CUSUM charts? 10

- 1.(b) Let $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ be a Markov chain on the state space $\{a, b, c\}$ with initial probability values $q_a = \frac{2}{5}, q_b = \frac{1}{5}, q_c = \frac{2}{5}$ and one-step transition probability matrix $((p_{ij}))$ given by.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Compute

(i) $P_r[X_1 = b, X_2 = b, X_3 = b, X_4 = a, X_5 = c | X_0 = a]$

(ii) $P_r[X_1 = b, X_2 = b, X_3 = a]$

10

- 1.(c) Discuss the estimation of the parameter of exponential distribution in case of time censoring. 10
- 1.(d) To a single server queuing system, the arrivals of customers are according to a Poisson process at the rate of 2 customers per hour. The service time has exponential distribution with mean service time of 12 minutes per customer. The steady state probability distribution (p_n), for the number of customers (n) is given below :

n	0	1	2	3	4	5	6 and above
p_n	0.08	0.1	0.4	0.2	0.2	0.02	0

Compute

- (i) the expected number of customers in the system and in the queue. 10
- (ii) the mean waiting time in the system and in the queue. 10
- 1.(e) Describe a two-person zero-sum game and explain mini-max, max-min and net values of a game. 10
- 2.(a) Explain the concept of sequential sampling plan for attributes and obtain the average sampling number function of a sequential sampling plan for testing the hypothesis
 $H_0 : \beta = \beta_0$ against the alternative hypothesis
 $H_1 : \beta = \beta_1$ in sampling from a population with density function $f(x, \beta)$. 15
- 2.(b) State and prove the necessary and sufficient condition for the existence of a saddle point in a two-person zero-sum game.
 Find the value of the game

	Player B				
Player A	9	3	1	8	0
	6	5	4	6	7
	2	4	3	3	8
	5	6	2	2	1

20

- 2.(c) Define and explain the following terms :
 (i) Reliability function
 (ii) Reliability of a series system
 (iii) Reliability of a parallel system
 The mean life of a component is 100 hours. If you want to build a parallel system having a mean life of 200 hours, how many components would be required considering a constant hazard model ? 15
- 3.(a) For an (M/M/1) : (∞ /FIFO) queuing system, derive the set of steady-state difference equations and hence find the solution of the system. In a supermarket, the average arrival rate of customers is 5 every 30 minutes. The average time it takes to list and calculate the customers purchases at the cash desk is 4.5 minutes and this time is exponentially distributed.
 (i) How long will the customers expect to wait for service at the cash desk ?
 (ii) What is the probability that the cashier is working ? 15
- 3.(b) Describe the principles on which a control chart is based. What is the concept behind the use of 3- σ limits in statistical quality control ?
 Control on measurements of pitch diameter of threads in aircraft fittings is checked with 5 successive items measured at regular intervals. 8 such samples are given below :

(Values are expressed in units of 0.0001 inch)

Sample	Measurement on each item of 5 items per hour				
1	46	45	44	43	42
2	41	41	45	42	41
3	40	40	43	42	40
4	42	43	43	42	45
5	42	44	47	47	45
6	39	46	45	42	41
7	46	44	41	40	45
8	40	45	43	40	39

- Construct the $\bar{X} - R$ chart and comment on the process control. 20
- 3.(c) Discuss the inventory model with instantaneous stochastic demand with continuous replenishment unit and obtain the condition for finding the optimum inventory level. 15
- 4.(a) What do you understand by the term "Sensitivity Analysis"? Discuss the effect of variation in the resource vector b in the linear programming problem with set of constraints $AX = b$. 20
- In the problem
- Maximize $Z = -x_1 + 2x_2 - x_3$
- subject to $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$
- $-x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 6$
- $x_2 + x_3 \leq 4$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
- discuss the effect of discrete change in the component b_2 so as to maintain the optimality of the current optimum solution. 20
- 4.(b) Explain the terms
- (i) Acceptance quality level (ii) LTPD (iii) Consumers' risk
- (iv) Producers' risk (v) OC curve 10
- 4.(c) Suppose that the purchaser and the ender agree that a defective rate of 10% in a lot is satisfactory. For the sampling plan ($N = 20, n = 5, c = 1$), determine the probability that a lot with this per cent (i.e. 10%) defective, will be accepted. Also determine the said probability if the sampling plan happens to be $N = 100, n = 5, c = 1$. Which of these two sampling plans seems better and why? 20

SECTION 'B'

- 5.(a) Let $\epsilon_t, \epsilon_{t+1}, \dots$ and ξ be independent variables with zero mean and unit variance. Considering $U_t = a\xi + \epsilon_t, -\infty < t < \infty$, show that the process is stationary with correlogram
- $$\rho_1 = \rho_2 = \dots = \frac{a^2}{1+a^2}$$
- 10
- 5.(b) What is validity of Test Scores? How you will calculate validity? Also make comparison with the concept of reliability. 10
- 5.(c) Define index numbers. Discuss their uses and limitations. 10
- 5.(d) Describe a method of fitting trend by logistic curve. 10
- 5.(e) Why the gross reproduction rate (GRR) and net reproduction rate (NRR) are considered as refined measures of fertility? 10
- Assuming that the ratio of female babies to total birth is 48.8 per cent, compute the gross reproduction rate for the following data: 10

Age group	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50
Fertility rate per thousand women	19	173	253	201	157	67	9

6.(a) Fill in the blanks in a portion of the life table given below :

20

Age in years	l_x	d_x	q_x	P_x	L_x	T_x	E_x^o
4	95000	500	?	?	?	4850300	?
5	?	400	?	?	?	?	?

6.(b) Following are two sets of indices one with 1960 as base and the other as 1970 as base :

Year	1960	1961	1966	1968	1970	1971	1972	1973
Index (Old)	100	110	115	125	150	...	...	
Index (New)	...	...	...	...	100	105	120	130

Splice the new series to old series, so as to have a continuous series from 1960. Also splice the old series to new series so as to have a continuous series from 1960. 15

6.(c) Given below is the data regarding deaths in two districts. On the basis of the given data, calculate the standardised death rates. Give your comments. 15

Age Range	Population (0 0)		Number of deaths (0 0)		Age Distribution of Standard 1000
	District A	District B	District A	District B	
0-10	2000	1000	50	20	206
10-55	7000	3000	75	30	583
55 and above	1000	2000	25	40	211

7.(a) For estimating simultaneous linear system of equations, how would you use the following methods of estimation and why ?

(i) Indirect least squares (ILS) method.

(ii) Two-stage least squares (2 SLS) method.

20

7.(b) What is meant by intelligence quotient (I.Q.) ? Describe the procedure and tests for measuring it. 15

7.(c) Elucidate ARIMA (p, d, q) representation of a time series.

For an autoregressive scheme $X_{t+1} = aX_t + b + \epsilon_{t+1}$ show that the correlogram is given by $\gamma_k = a^k$, where k is the order of the serial correlation. Also, show that the correlogram is decreasing exponentially for $0 < a < 1$. 15

8.(a) Explain the time reversal and factor reversal tests of index numbers. Examine whether Laspeyre's and Paasche's index numbers satisfy these tests. 15

8.(b) What do you mean by stable and quasi-stable populations ? Stating the basic assumptions of stable population theory, derive three basic equations which provide information about the intrinsic growth rate, birth rate and age distribution of the population. 20

8.(c) Explain the terms

(i) summation score as a function of ability

(ii) percentile scores

(iii) Z-score.

Describe how T-scores are to be found when we are given test scores in the form of a frequency table. 15